Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования
Тверской государственный университет

А.А. Васильев

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА, ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

КРАТКИЙ КУРС И ПРАКТИКУМ

ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ФЕДЕРАЛЬНОМУ
ИНТЕРНЕТ-ЭКЗАМЕНУ
В СФЕРЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ “МАТЕМАТИКА”

Учебное пособие
для студентов, обучающихся по специальности
080103 “Национальная экономика”
и другим экономическим специальностям
и направлениям

Тверь 2008

Рецензенты:
кандидат технических наук, старший научный сотрудник *В.М. Кукушкин*,
(зав. кафедрой математики и информатики
Тверского филиала Московского гуманитарно-экономического института);
кандидат технических наук, старший научный сотрудник *С.И. Шукурьян*,
(зав. кафедрой автоматизированной обработки экономической информации
и статистики Тверского государственного университета)

Васильев, А.А. Теория вероятностей, математическая статистика, экономико-математические методы и экономико-математические модели. Краткий курс и практикум для подготовки к Федеральному Интернет-экзамену в сфере профессионального образования по дисциплине “Математика” [Текст] : учеб. пособие для студентов, обучающихся по специальности 080103 “Национальная экономика” и другим экономическим специальностям и направлениям / А.А. Васильев ; Федеральное агентство по образованию ; Тверской гос. ун-т. – Тверь : Твер. гос. ун-т, 2008. – 119 с.

Учебное пособие предназначено для самостоятельной подготовки студентов специальности “Национальная экономика” к Федеральному Интернет-экзамену в сфере профессионального образования по математике (по дидактическим единицам “Теория вероятностей”, ‘Математическая статистика”, “Экономико-математические методы” и “Экономико-математические модели”).

Оно содержит сведения об Интернет-экзамене, тематическую структуру и типовые задачи аттестационных педагогических измерительных материалов по математике в части перечисленных дидактических единиц, решение всех типовых задач с приведением необходимых теоретических сведений, тесты для самостоятельного решения и ответы на них, а также необходимые сведения для выполнения репетиционного тестирования.

Пособие может быть также полезно студентам других экономических специальностей и направлений, а также преподавателям математики у них.

Печатается по решению кафедры
автоматизированной обработки
экономической информации и статистики
(протокол № 10 от 18 июня 2008 г.)

Технический редактор Л.И. Василевская
Компьютерная верстка А.А. Васильев

Подписано в печать 25.06.2008 г. Формат 60×90 1/16.
Бумага типографская №1. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 7,5.
Тираж 50 экз. Заказ № 226.

Тверской государственный университет,
Редакционно-издательское управление.
Адрес: Россия, 170000, г. Тверь, ул. Желябова 33,
Тел. РИУ: (4822) 35-60-63

Отпечатано на экономическом факультете Тверского государственного университета
170021, г. Тверь, ул. 2-я Грибоедова, 22

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Эксперимент по введению Федерального Интернет-экзамена в сфере профессионального образования (ФЭПО) проводится с мая 2005 года. С этого времени во всех его этапах участвует Тверской государственный университет (ТвГУ).

Основные положения по организации ФЭПО и по использованию его результатов заключаются в следующем [1-4].

1. ФЭПО проводится Национальным аккредитационным агентством в сфере образования (Росаккредагентство), г. Йошкар-Ола.
2. ФЭПО является видом проверки остаточных знаний студентов по циклу общих гуманитарных и социально-экономических дисциплин и по циклу общих математических и естественнонаучных дисциплин.
3. Основной задачей ФЭПО является оценка соответствия результатов обучения студентов требованиям государственных образовательных стандартов (ГОС).
4. Оценка соответствия результатов обучения требованиям ГОС производится на основе результатов выполнения студентами заданий аттестационных педагогических измерительных материалов (АПИМ) по дисциплинам федерального компонента ГОС.
5. АПИМ разработаны для каждой дисциплины федерального компонента ГОС из цикла общих гуманитарных и социально-экономических дисциплин и из цикла общих математических и естественнонаучных дисциплин для каждой специальности и направления.
6. Структура АПИМ по дисциплине включает основные дидактические единицы требований ГОС к обязательному минимуму содержания основной образовательной программы по данной дисциплине. Дидактическая единица (ДЕ) – это логически самостоятельная часть учебного материала, по своему объему и структуре соответствующая таким компонентам содержания как понятие, теория, закон, явление, факт, объект и т. п. Например, дидактическими единицами дисциплины "Математика" для студентов специальности 080103 "Национальная экономика" являются "Линейная алгебра", "Математический анализ", "Теория вероятностей", "Математическая статистика", "Экономико-математические методы" и "Экономико-математические модели". Каждая ДЕ состоит из нескольких тем, по каждой из которых предполагается выполнение одного задания. С тематической структурой и демонстрационным вариантом АПИМ по любой дисциплине любой специальности (направления) можно ознакомиться на сайте Росаккредагентства "Федеральный Интернет-экзамен в сфере профессионального образования" по адресу: http://www.fepo.ru.
7. АПИМ представляют собой специальным образом подобранные наборы тестовых заданий закрытой формы (выбор одного или нескольких ответов из предложенных), выполнение которых требует использования знаний и умений в знакомой ситуации (то есть задания рассчитаны на типовые действия). При таком способе построения АПИМ Интернет-экзамен позволяет оценить только минимальный, базовый уровень освоения ГОС и не может служить полноценной экзаменационной процедурой для студентов. Поэтому ФЭПО следует рассматривать не как альтернативу обычному экзамену, а как его дополнение. Выполнение Интернет-экзамена соответствует освоению дисциплины на оценку "удовлетворительно". Для получения оценок "хорошо" и "отлично" необходимо показать творческий подход к дисциплине, который может быть оценен только на экзамене, проводимом преподавателем.

8. Концептуальной основой модели оценки выполнения требований образовательного стандарта является оценка освоения всех ДЕ дисциплины на уровне требований ГОС.

Согласно этой модели, подготовка отдельного студента оценивается по каждой ДЕ путём сравнения количества правильно выполненных заданий с критерием освоения. Подготовка студента считается соответствующей требования стандарта, если он освоил все контролируемые ДЕ ГОС.

Показателем освоения дисциплины студентами основной образовательной программы (учебной группы или курса специальности (направления)) установлен процент студентов, освоивших все ДЕ контролируемой дисциплины. В качестве критериальной оценки показателя освоения дисциплины установлено значение в 50%.

Структура формирования критерия освоения ГОС по дисциплине представлена в табл. 1.

Таблица 1

Структура формирования критерия освоения ГОС по дисциплине

Объект оценки	Показатель освоения ГОС	Модель критерия освоения ГОС
Студент	Доля освоенных ДЕ ГОС	Освоение всех ДЕ ГОС
Основная образовательная программа	Доля студентов, освоивших все ДЕ ГОС	50% студентов, освоивших все ДЕ ГОС

9. ФЭПО проводится таким образом, что студенты одной специальности разных вузов по всей стране оцениваются с использованием компьютерных технологий по одним и тем же АПИМ примерно в одно и то же время.

10. ФЭПО проводится Росаккредагентством в режимах on-line и off-line.

В режиме on-line студенты выполняют задания АПИМ в специально разработанной программной оболочке ТестЭкзаменатор в среде Интернета в одно и то же время. Результаты выполнения экзаменационного АПИМ каждым студентом оцениваются двумя показателями: процентом правильно выполненных заданий и процентом освоенных ДЕ. Данные показатели формируются в режиме on-line по окончанию экзамена группы в виде рейтинг-листа.

В режиме off-line в вуз по электронной почте высылается банк заданий и программная оболочка ТестЭкзаменатор. В этом случае студенты также выполняют задания за компьютером, но результаты получают на следующий день после отсылки результатов для проверки в Росаккредагентство.

ТвГУ принимает участие в ФЭПО в режиме off-line.

11. ФЭПО как вид проверки остаточных знаний студентов по циклу общих гуманитарных и социально-экономических дисциплин и по циклу общих математических и естественнонаучных дисциплин рекомендован вузам Федеральной службой по надзору в сфере образования и науки при проведении самообследования.

12. Результаты ФЭПО могут быть использованы вузом в отчете по самообследованию, а также при проведении мониторинга качества подготовки студентов во внутривузовских системах менеджмента качества.

13. При регулярном участии вуза в ФЭПО (не менее чем по трем дисциплинам каждого цикла) результаты тестирования могут быть зачтены в качестве официальных при комплексной оценке вуза.

Проверка остаточных знаний у студентов экономических специальностей (в частности у студентов специальности 080103 “Национальная экономика”) по дисциплине “Математика” в рамках ФЭПО имеет ряд особенностей и проблем. К ним относятся:

1) АПИМ Интернет-экзамена по математике предназначены для проверки остаточных знаний студентов по всем ДЕ дисциплины (включающим для студентов специальности “Национальная экономика” линейную алгебру, математический анализ, теорию вероятностей, математическую статистику, экономико-математические методы и экономико-математические модели);

2) изучение дисциплины происходит, как правило, в течение первых четырех семестров, поэтому участие в Интернет-экзамене возможно только в конце 4-о семестра перед экзаменом или в 5-м или 6-м семестрах;

3) невозможность использовать Интернет-экзамен (при участии в нем в конце 4 семестра) в качестве экзамена за последний 4-й семестр изучения, так как, во-первых, Росаккредагентство по каждому студенту предоставляет только информацию о проценте освоенных ДЕ по всей дисциплине и об освоении (или не освоении) каждой ДЕ (без указания количества правильно выполненных заданий по ней), во-вторых, в соответствии с моделью оценки выполнения требований ГОС освоение всех ДЕ Интернет-экзамена соответствует освоению дисциплины на оценку “удовлетворительно”;

4) слабые остаточные знания у ряда студентов по линейной алгебре и математическому анализу, так как с момента окончания изучения этих разделов в 1-м и 2-м семестрах прошли полтора года и год соответственно;

5) необходимость самостоятельной подготовки к Интернет-экзамену для восстановления утраченных знаний и навыков;

6) отсутствие запланированного времени на самостоятельную подготовку к Интернет-экзамену и на консультации у преподавателей в рабочих учебных планах специальностей;

7) сложности в организации консультаций преподавателей разных разделов математики (разные разделы, как правило, ведут в разных семестрах разные преподаватели) в конце 4-о семестра.

Решение перечисленных проблем, в той или иной мере, возможно путем организации интенсивной самостоятельной работы студентов непосредственно перед ФЭПО по математике на основе предоставления им кратких руководств по решению типовых задач АПИМ по данной дисциплине и организации выполнения репетиционного тестирования.

В настоящее время студенты экономического факультета для самостоятельной подготовки к Интернет-экзамену по математике по разделам “Линейная алгебра” и “Математический анализ” могут использовать учебное пособие [5].

Настоящее учебное пособие предназначено для самостоятельной подготовки студентов специальности “Национальная экономика” к Интернет-экзамену по математике (по дидактическим единицам “Теория вероятностей”, ‘Математическая статистика”, “Экономико-математические методы” и “Экономико-математические модели”).

Оно содержит тематическую структуру и типовые задачи АПИМ по математике в части дидактических единиц перечисленных разделов, решение всех типовых задач с приведением необходимых теоретических сведений, тесты для самостоятельного решения и ответы на них, а также необходимые сведения для выполнения репетиционного тестирования.

Краткие теоретические сведения приведены перед выполнением каждого типового задания. При этом их объем значительно превышает объем сведений, необходимых для выполнения конкретного типового задания. Это связано с постоянным совершенствованием АПИМ и появлением в них заданий нового типа. Для удобства использования теоретического материала при подготовке к Интернет-экзамену теоретические сведения, непосредственно относящиеся к выполнению конкретного задания, помещены в прямоугольные рамки.

Данное пособие не следует рассматривать как полноценное учебное пособие по теории вероятностей, математической статистике, экономико-математическим методам и экономико-математическим моделям. Оно предназначено исключительно для подготовки к Федеральному Интернет-экзамену по математике и содержит только минимальный объем сведений, позволяющий получить, в лучшем случае, зачет или оценку “удовлетворительно” на экзамене. Ссылки на литературу, позволяющую изучить соответствующие разделы математики в полном объеме, приведены перед типовыми заданиями по каждой дидактической единице.

Типовые задания по математической статистике рассмотрены не в порядке возрастания их номеров в демонстрационном варианте АПИМ, а в логическом порядке их изучения в математической статистике.

Для быстрого поиска необходимых теоретических сведений пособие снабжено тематическим указателем.

Пособие может быть также полезно студентам других экономических специальностей и направлений, а также преподавателям математики у них.

1. ТЕМАТИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА АТТЕСТАЦИОННЫХ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ ПО ДИСЦИПЛИНЕ “МАТЕМАТИКА” (ПО ДИДАКТИЧЕСКИМ ЕДИНИЦАМ “ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ”, “МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА”, “ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ” И “ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ”)

Тематическая структура АПИМ по математике (по дидактическим единицам “Теория вероятностей”, “Математическая статистика”, “Экономико-математические методы” и “Экономико-математические модели”) ФЭПО в 2008 г. для студентов специальности 080103 “Национальная экономика” [6] приведена в табл. 2.

Таблица 2

Тематическая структура АПИМ по математике

Номер ДЕ	Наименование ДЕ ГОС	Номер задания	Тема задания
3	Теория вероятностей	17	Теория вероятностей: основные понятия
		18	Теоремы сложения и умножения вероятностей: вероятность произведения
		19	Биномиальный закон распределения вероятностей
		20	Законы распределения вероятностей непрерывных случайных величин: равномерное распределение
4	Математическая статистика	21	Непрерывное распределение признака
		22	Проверка статистических гипотез
		23	Интервальные оценки параметров распределения
		24	Точечные оценки параметров распределения: оценка дисперсии
5	Экономико-математические методы	25	Линейное программирование: графическое задание области допустимых решений
		26	Линейное программирование: аналитическое задание области допустимых решений
		27	Нелинейное программирование
		28	Транспортная задача
6	Экономико-математические модели	29	Функции полезности
		30	Кривые безразличия
		31	Функции выпуска продукции
		32	Функции спроса и предложения: равновесный объем

2. ТИПОВЫЕ ЗАДАНИЯ

Типовые задания демонстрационного варианта АПИМ по математике Интернет-экзамена в 2008 г. для студентов специальности 080103 “Национальная экономика” приведены в [6]. Демонстрационный вариант содержит 32 задания, из них 8 заданий по линейной алгебре, 8 – по математическому анализу, 4 – по теории вероятностей, 4 по математической статистике, 4 – по экономико-математическим методам, 4 – по экономико-математическим моделям.

2.1. Типовые задания по теории вероятностей

Теория вероятностей – математическая наука, предназначенная для разработки и исследования свойств математических моделей, имитирующих механизмы функционирования реальных явлений или систем, условия существования которых включают в себя неизбежность влияния большого числа случайных (то есть не поддающихся строгому учету и контролю) факторов.

Для самостоятельного изучения теории вероятностей студентами экономических специальностей можно рекомендовать любой учебник (учебное пособие) из [7-12].

2.1.1. Задание № 17 по теме “Теория вероятностей: основные понятия”

Вероятность достоверного события равна …

Варианты ответов:

1) 0; 2) –1; 3) 0,5; 4) 1.

Требуется выбрать один вариант ответа.

Краткие теоретические сведения по теме

Опыт (эксперимент, испытание) – некоторая воспроизводимая совокупность условий, в которых наблюдается то или иное явление, фиксируется тот или иной результат.

Стохастический опыт (опыт со случайным исходом) – опыт, результат которого нельзя предугадать заранее и он изменяется при повторении опыта.

Событие – исход или результат стохастического опыта.

Наблюдаемые в опытах события делятся на достоверные, невозможные и случайные. **Достоверным событием** называется событие, которое должно обязательно произойти в результате данного опыта. **Невозможным событием** называется событие, которое в данном опыте вообще не может произойти. **Случайным событием** называется событие, которое в результате данного опыта может произойти, а может и не произойти.

Вероятность события – число, являющееся мерой объективной возможности появления (наступления) события.

Исторически сложились три способа вычисления вероятностей случайных событий:

1) непосредственный подсчет вероятностей событий на основе классического определения вероятности события;
2) с использованием понятия геометрической вероятности события;
3) с использованием понятия статистической вероятности события.

К основным вспомогательным понятиям при непосредственном подсчете вероятностей событий относятся следующие понятия:

1) **полная группа событий** – группа событий в одном стохастическом опыте, хотя бы одно из которых неизбежно должно появиться в результате этого опыта;

2) **несовместные события** – события, появление одного из которых исключает появление других событий в данном стохастическом опыте;

3) **совместные события** – события, появление одного из которых не исключает появления в данном стохастическом опыте других событий;

4) **равновозможные события** – события в данном стохастическом опыте, ни одно из которых не является объективно более возможным, чем другое;

5) **противоположные (взаимно дополнительные) события** – два события A и $\bar{A}$ (читается “не A”), непоявление одного из которых в результате данного стохастического опыта влечет появление другого.

Классическое определение вероятности события формулируется следующим образом. **Вероятностью** $P(A)$ **события** A называется отношение числа благоприятных этому событию исходов $m(A)$ к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов опыта n, образующих полную группу, то есть

$$P(A) = \frac{m(A)}{n}.$$

Элементарным исходом называется каждый из возможных результатов опыта. Те элементарные исходы, в которых интересующее событие наступает, называются **благоприятными этому событию**.

Из классического определения вероятности события вытекают три ее свойства:

1) вероятность достоверного события равна единице;

2) вероятность невозможного события равна нулю;

3) вероятность случайного события заключена между нулем и единицей, то есть $0 < P(A) < 1$.

Следовательно, вероятность любого события удовлетворят неравенству $0 \le P(A) \le 1$.

Геометрической вероятностью события A называется отношение меры области, благоприятствующей появлению этого события, к мере всей области, то есть

$$P(A) = \frac{mes\ g}{mes\ G},$$

где mes - обозначение меры (длины, площади, объема) области;

$mes\ g$ - мера области, благоприятствующей появлению события A;

$mes\ G$ - мера всей области.

Статистической вероятностью $\tilde{P}(A)$ события A называется относительная частота (частость) появления этого события $w(A)$ в проведенных испытаниях, то есть

$$\tilde{P}(A) = w(A) = \frac{m}{n},$$

где n - общее число проведенных испытаний;

m - число испытаний, в которых событие A появилось.

Свойства геометрической вероятности и статистической вероятности аналогичны свойствам вероятности, вытекающим из ее классического определения.

Решение

В соответствии с 1-м свойством вероятности события вероятность достоверного события равна единице.

Номер варианта ответа: 4.

2.1.2. Задание № 18 по теме “Теоремы сложения и умножения вероятностей: вероятность произведения”

В урне лежит 3 белых и 2 черных шара. Последовательно, без возвращения и наудачу извлекают 3 шара. Тогда вероятность того, что первый и второй шары белые, а третий шар черный, равна …

Варианты ответов:

1) $\frac{1}{5}$; 2) $\frac{18}{125}$; 3) $\frac{3}{10}$; 4) $\frac{3}{25}$.

Требуется выбрать один вариант ответа.

Краткие теоретические сведения по теме

Суммой $A+B$ **двух событий** называется событие, состоящее в появлении или события A, или события B, или обоих этих событий. **Суммой нескольких событий** называется событие, которое состоит в появлении хотя бы одного из этих событий.

Теоремы сложения вероятностей:

1) вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий, то есть $P(A+B)=P(A)+P(B)$;

2) вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий, то есть $P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$;

3) сумма вероятностей событий A_1, A_2, …, A_n, образующих полную группу, равна единице, то есть $\sum_{i=1}^{n} P(A_i)=1$;

4) сумма вероятностей противоположных событий равна единице, то есть $P(A)+P(\bar{A})=1$;

5) вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления, то есть $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

Произведением двух событий A и B называется событие $A\cdot B$, состоящее в совместном появлении этих событий. **Произведением нескольких событий** называется событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий.

Условной вероятностью $P_A(B)$ называется вероятность события B, вычисленная в предположении, что событие A уже наступило. Она вычисляется по формуле

$$P_A(B)=\frac{P(AB)}{P(A)}, \quad 0<P(A)\le 1.$$

Общая формулировка теоремы умножения вероятностей. Вероятность совместного появления нескольких событий A_1, A_2, …, A_n равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события уже появились, то есть

$$P(A_1 A_2 A_3 \times \ldots \times A_n) = P(A_1) P_{A_1}(A_2) P_{A_1 A_2}(A_3) \times \ldots \times P_{A_1 A_2 \ldots A_{n-1}}(A_n),$$

где $P_{A_1 A_2 \ldots A_{n-1}}(A_n)$ - вероятность события A_n, вычисленная в предположении, что события A_1, A_2, …, A_{n-1} уже появились.

В частности, вероятность совместного появления трех событий A_1, A_2 и A_3 равна

$$P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) P_{A_1}(A_2) P_{A_1 A_2}(A_3).$$

Событие B называется **независимым** от события A, если появление события A не изменяет вероятности появления события B, то есть если условная вероятность события B равна его безусловной вероятности: $P_A(B) = P(B)$.

Теорема умножения вероятностей для двух независимых событий. Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий, то есть $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.

Несколько событий называются **попарно независимыми**, если каждые два из них независимы. Несколько событий называются **независимыми в совокупности**, если независимы каждые два из них и независимы каждое из этих событий и все возможные произведения остальных.

Теорема умножения вероятностей для нескольких событий, независимых в совокупности. Вероятность совместного появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий, то есть

$$P(A_1 A_2 A_3 \times \ldots \times A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \times \ldots \times P(A_n).$$

Теорема о вычислении вероятности появления хотя бы одного из событий, независимых в совокупности. Вероятность $P(A)$ появления хотя бы одного из событий A_1, A_2, …, A_n, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных им событий, то есть

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \times \ldots \times P(\bar{A}_n),$$

где $P(\bar{A}_1) = 1 - P(A_1)$, $P(\bar{A}_2) = 1 - P(A_2)$, … , $P(\bar{A}_n) = 1 - P(A_n)$ - вероятности событий, противоположных событиям A_1, A_2, …, A_n, соответственно.

Решение

Событие A, состоящее в последовательном извлечении первого белого шара, второго белого шара и третьего черного шара можно представить как последовательность следующих трех зависимых событий:

A_1 – извлечение первого белого шара;

A_2 – извлечение второго белого шара;

A_3 – извлечение третьего черного шара.

Тогда событие A равносильно совместному появлению событий A_1, A_2 и A_3, то есть событию $A_1 A_2 A_3$.

В соответствии с классическим определением вероятности события

$P(A_1) = \dfrac{m(A_1)}{n_1} = \dfrac{3}{5}$ - безусловная вероятность извлечения первого белого шара (общее число всех возможных исходов опыта по извлечению одного шара из урны n_1 равно 5 (3 белых + 2 черных шара), а число исходов, благоприятных появлению белого шара $m(A_1)$ равно 3);

$P_{A_1}(A_2) = \dfrac{m(A_2)}{n_2} = \dfrac{2}{4}$ - вероятность извлечения второго белого шара, при условии, что первый извлеченный шар был белым (общее число всех возможных исходов опыта по извлечению одного шара из урны n_2 уменьшилось на 1 и стало равно 4 (2 белых + 2 черных шара), а число исходов, благоприятных появлению белого шара $m(A_2)$ также уменьшилось на 1 и стало равно 2);

$P_{A_1 A_2}(A_3) = \dfrac{m(A_3)}{n_3} = \dfrac{2}{3}$ - вероятность извлечения третьего черного шара, при условии, что первый извлеченный шар был белым и второй извлеченный шар был белым (общее число всех возможных исходов опыта по извлечению одного шара из урны n_3 уменьшилось еще на 1 и стало равно 3 (1 белый + 2 черных шара), а число исходов, благоприятных появлению черного шара $m(A_3)$ равно 2).

Тогда в соответствии с общей формулировкой теоремы умножения вероятностей, получим

$$P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) P_{A_1}(A_2) P_{A_1 A_2}(A_3) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{5}.$$

Номер варианта ответа: 1.

2.1.3. Задание № 19 по теме “Биномиальный закон распределения вероятностей”

Вероятность появления события A в 10 независимых испытаниях, проводимых по схеме Бернулли, равна 0,8. Тогда дисперсия числа появлений этого события равна …

Варианты ответов:

1) 0,08; 2) 1,6; 3) 8; 4) 0,16.

Требуется выбрать один вариант ответа.

Краткие теоретические сведения по теме

На практике встречаются задачи, в которых один и тот же опыт многократно повторяется в сходных условиях. В результате каждого опыта может появиться или не появиться некоторое событие A. Требуется найти вероятность числа k наступлений данного события в n опытах (испытаниях).

Данная задача решается просто в случае, когда испытания являются независимыми. **Независимыми испытаниями относительно события** A называется последовательность испытаний, в каждом из которых вероятность наступления события A не зависит от исходов других испытаний.

Схемой Бернулли называется простейший тип последовательности независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться с одной и той же вероятностью p и эта вероятность остается одной и той же, независимо от результатов предшествующих или последующих испытаний.

Вероятность $P_n(k)$ того, что событие A наступит k раз в n испытаниях, проводимых по схеме Бернулли, вычисляется по **формуле Бернулли** вида

$$P_n(k)=C_n^k\,p^k\,q^{n-k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\,p^k\,q^{n-k},$$

где $q=1-p$ - вероятность непоявления события A в каждом отдельном испытании.

Случайная величина – величина, которая в результате опыта может принять только одно возможное значение, неизвестное до опыта и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

Случайные величины делятся на дискретные и непрерывные.

Дискретная случайная величина – случайная величина, которая принимает отдельные, изолированные друг от друга, значения с определенными вероятностями. Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным или бесконечным, но счетным.

Закон распределения вероятностей случайной величины – любое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и их вероятностями.

Закон распределения вероятностей случайной величины может быть задан: 1) в виде формулы (аналитически); 2) в виде таблицы; 3) в виде графика.

На практике часто используется биномиальный закон распределения вероятностей дискретной случайной величины.

Дискретная случайная величина X имеет **биномиальный закон распределения**, если она принимает значения 0, 1, 2, … , k, …, n с вероятностями, вычисляемыми по формуле Бернулли и равными

$$P_n(X=k)=C_n^k\,p^k\,q^{n-k},$$

где $n\geq 1$ - целое число, $0<p<1$, $k=$ 0, 1, 2, … , n.

Данное определение использует аналитический способ описания закона распределения вероятностей случайной величины.

Теорема. Математическое ожидание случайной величины X, распределенной по биномиальному закону (математическое ожидание числа появлений события в испытаниях, проводимых по схеме Бернулли), равно

$$M(X)=np,$$

а ее дисперсия (дисперсия числа появлений события в испытаниях, проводимых по схеме Бернулли) равна

$$D(X)=npq.$$

Решение

В данном задании n = 10; p = 0,8; $q=1-p$ = 1 – 0,8 = 0,2. Следовательно, дисперсия числа появлений события в испытаниях, проводимых по схеме Бернулли, равна

$$D(X)=npq=10\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2=1{,}6.$$

Номер варианта ответа: 2.

2.1.4. Задание № 20 по теме “Законы распределения вероятностей непрерывных случайных величин: равномерное распределение”

Случайная величина распределена равномерно на интервале (10; 12). Тогда ее математическое ожидание и дисперсия соответственно равны …

Варианты ответов:

1) 10,5 и $\frac{1}{3}$; 2) 11 и $\frac{1}{3}$; 3) 11 и 1; 4) 10 и $\frac{1}{4}$.

Требуется выбрать один вариант ответа.

Краткие теоретические сведения по теме

Непрерывная случайная величина – случайная величина, которая может принимать любые значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка. Число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.

К *аналитическим способам описания* непрерывной случайной величины относятся:

1) **функция распределения вероятностей** – вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее, чем заранее заданное фиксированное действительное число x: $F(x) = P(X < x)$ (функция распределения является универсальным способом описания любой случайной величины - непрерывной или дискретной);

2) **плотность распределения вероятностей** – первая производная функции распределения вероятностей, то есть $f(x) = F'(x)$ (плотность распределения пригодна для описания только непрерывных случайных величин).

Свойства функции распределения вероятностей.

1. Значения функции распределения принадлежат отрезку [0, 1], то есть $0 \le F(x) \le 1$.

2. Функция распределения – неубывающая функция, то есть если $x_2 > x_1$, то $F(x_2) \ge F(x_1)$.

Следствие 1. Вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу (a, b), равна приращению функции распределения на этом интервале: $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$.

Следствие 2. Вероятность того, что непрерывная случайная величина примет одно определенное значение, равна нулю.

3. Если возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (a, b), то: а) $F(x) = 0$ при $x \le a$; б) $F(x) = 1$ при $x \ge b$.

Следствие. Если возможные значения непрерывной случайной величины расположены на всей оси x, то справедливы следующие предельные соотношения:

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \ \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

Свойства плотности распределения вероятностей.

1. Плотность распределения – неотрицательная функция, то есть $f(x) \ge 0$.

2. Интеграл в бесконечных пределах от плотности распределения вероятностей равен единице, то есть

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1.$$

К *графическим способам описания* непрерывной случайной величины относятся:

1) график функции распределения вероятностей;

2) график плотности распределения вероятностей, называемый **кривой распределения**.

Геометрическое истолкование свойств плотности распределения вероятностей.

1. Вся кривая распределения расположена не ниже оси абсцисс.

2. Полная площадь, ограниченная кривой распределения и осью абсцисс равна единице.

Теорема. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (a, b), равна определенному интегралу от плотности распределения, взятому в пределах от a до b, то есть

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Геометрическое истолкование данной теоремы заключается в следующем: вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу (a, b), равна площади криволинейной трапеции, ограниченной осью абсцисс Ox, кривой распределения $f(x)$ и прямыми $x = a$ и $x = b$.

Выражение для нахождения функции распределения по известной плотности:

$$F(X) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx.$$

Законы распределения вероятностей исчерпывающим образом описывают распределение вероятностей случайной величины и позволяют вычислять вероятности любых связанных с ней событий. Однако во многих практических задачах нет надобности в таком описании или оно отсутствует. В таких случаях применяются числовые характеристики случайной величины.

Числовые характеристики случайной величины – набор показателей, позволяющих в сжатой форме охарактеризовать наиболее существенные черты распределения вероятностей.

Классификация числовых характеристик случайной величины:

1) **характеристики положения** – характеристики, определяющие положение случайной величины на числовой оси, то есть некоторое среднее ориентировочное значение случайной величины, около которого группируются ее возможные значения (математическое ожидание, мода, медиана);

2) **характеристики рассеивания** – характеристики, оценивающие меру рассеивания возможных значений случайной величины вокруг ее математического ожидания (дисперсия, среднее квадратическое отклонение);

3) характеристики формы – характеристики, описывающие асимметрию (скошенность) и островершинность распределения вероятностей (коэффициент асимметрии, эксцесс).

Математическим ожиданием (средним значением) $M(X)$ **дискретной случайной величины** X называется сумма произведений всех ее возможных значений x_1, x_2, ..., x_n на вероятности p_1, p_2, ..., p_n этих значений, то есть

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i\,p_i,$$

где n - количество возможных значений случайной величины X.

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X с плотностью распределения вероятностей $f(x)$ называется определенный интеграл вида

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)\,dx.$$

Математическое ожидание случайной величины имеет ту же размерность, что и случайная величина.

Свойства математического ожидания случайной величины.

1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной, то есть $M(C)=C$.

2. Постоянный множитель случайной величины может быть вынесен за знак математического ожидания: $M(CX)=C\,M(X)$.

3. Математическое ожидание алгебраической суммы двух случайных величин (как зависимых, так и независимых) равно такой же сумме их математических ожиданий, то есть $M(X \pm Y)=M(X)\pm M(Y)$.

Следствие. Математическое ожидание алгебраической суммы нескольких случайных величин равно такой же сумме их математических ожиданий.

4. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий, то есть $M(X\,Y)=M(X)\,M(Y)$.

Следствие. Математическое ожидание произведения нескольких взаимно независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий.

5. Если все значения случайной величины увеличить (уменьшить) на постоянную C, то на эту же постоянную C увеличится (уменьшится) математическое ожидание этой случайной величины: $M(X \pm C)=M(X)\pm C$.

6. Математическое ожидание отклонения $X-M(X)$ случайной величины X от ее математического ожидания $M(X)$ равно нулю, то есть $M[X-M(X)]=0$.

Модой $M_0(X)$ случайной величины X называется ее наиболее вероятное значение (то, для которого вероятность p_i для дискретной случайной величины или плотность распределения вероятностей $f(x)$ для непрерывной случайной величины достигает максимума).

Медианой $M_e(X)$ непрерывной случайной величины X называется такое ее значение, для которого

$$P[X<M_e(X)]=P[X>M_e(X)]=\frac{1}{2},$$

то есть одинаково вероятно, окажется ли значение случайной величины больше или меньше медианы. Геометрически медиана случайной величины представляет собой абсциссу точки, которая делит площадь под кривой распределения случайной величины пополам.

Дисперсией случайной величины называется математическое ожидание квадрата ее отклонения от математического ожидания, то есть

$$D(X)=M[X-M(X)]^2.$$

Выражение для вычисления дисперсии дискретной случайной величины имеет вид

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}[x_i-M(X)]^2\,p_i\,.$$

Выражение для вычисления дисперсии непрерывной случайной величины имеет вид

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-M(X)]^2\,f(x)\,dx\,.$$

Свойства дисперсии случайной величины.

1. Дисперсия постоянной величины равна нулю: $D(C)=0$.

2. Постоянный множитель случайной величины можно выносить за знак дисперсии, предварительно возведя его в квадрат: $D(CX) = C^2 D(X)$.

3. Дисперсия суммы или разности двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий: $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$.

Следствие 1. Дисперсия суммы (разности) нескольких взаимно независимых случайных величин равна сумме их дисперсий.

Следствие 2. Дисперсия суммы постоянной и случайной величин равна дисперсии случайной величины: $D(C + X) = D(X)$.

4. Дисперсия случайной величины равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины и квадратом ее математического ожидания, то есть

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Дисперсия случайной величины имеет размерность квадрата случайной величины, что не всегда удобно. Поэтому в случаях, когда желательно, чтобы оценка рассеивания имела размерность случайной величины, вычисляют ее среднее квадратическое отклонение.

Средним квадратическим отклонением случайной величины называется квадратный корень из дисперсии, то есть

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

На практике наиболее часто используются равномерный, показательный и нормальный законы распределения вероятностей непрерывных случайных величин.

Непрерывная случайная величина X имеет **равномерный закон** распределения вероятностей на отрезке $[a, b]$, если ее плотность распределения вероятностей $f(x)$ постоянна на этом отрезке и равна нулю вне его, то есть

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad при \quad x < a, \\ \dfrac{1}{b-a} \quad при \quad a \le x \le b, \\ 0 \quad при \quad x > b. \end{cases}$$

Функция распределения вероятностей случайной величины, распределенной по равномерному закону, имеет вид

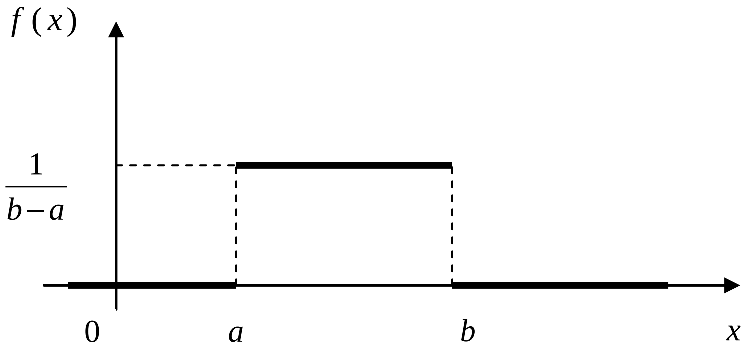
$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad при \quad x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} \quad при \quad a \le x \le b, \\ 1 \quad при \quad x > b. \end{cases}$$

Кривая распределения и график функции распределения случайной величины, распределенной по равномерному закону, представлены на рис. 1 *а, б*.

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по равномерному закону, равны:

$$M(X) = \frac{a+b}{2}, \ D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

а)



б)

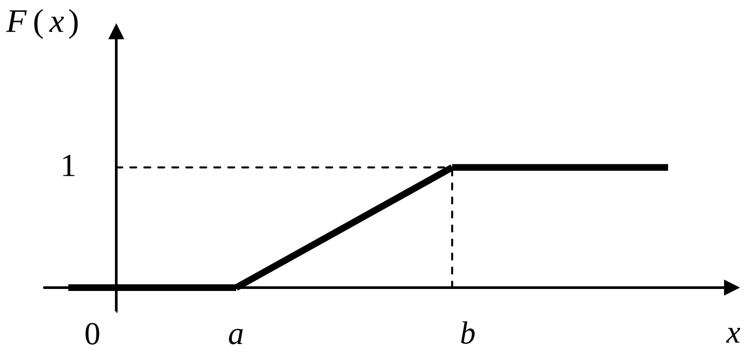


Рис. 1. **Кривая и график функции распределения случайной величины, распределенной по равномерному закону**

Непрерывная случайная величина X имеет **показательный (экспоненциальный) закон** распределения вероятностей с параметром λ, если ее плотность распределения имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad при \quad x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} \quad при \quad x \geq 0. \end{cases}$$

Функция распределения вероятностей случайной величины, распределенной по показательному (экспоненциальному) закону, имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad при \quad x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} \quad при \quad x \geq 0. \end{cases}$$

Кривая распределения и график функции распределения случайной величины, распределенной по показательному (экспоненциальному) закону, представлены на рис. 2 *а*, *б*.

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по показательному (экспоненциальному) закону, равны:

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}, \; D(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

а)

б)

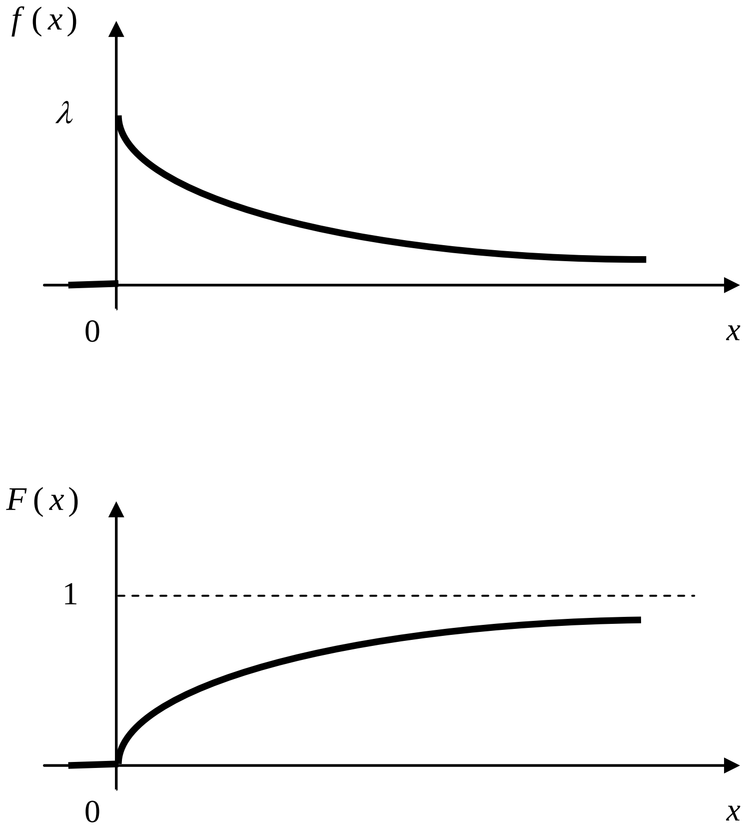


Рис. 2. **Кривая и график функции распределения случайной величины, распределенной по экспоненциальному закону**

Непрерывная случайная величина X имеет **нормальный закон** распределения вероятностей (**закон Гаусса**) с параметрами a и σ, если ее плотность распределения имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} .$$

В соответствии с выражением для нахождения функции распределения вероятностей по известной плотности, функция распределения вероятностей случайной величины, распределенной по нормальному закону, имеет вид

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}\, dt .$$

Данный интеграл является “неберущимся” в элементарных функциях. Поэтому его выражают через **функцию (интеграл вероятностей) Лапласа** вида

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt ,$$

для которой составлены таблицы.

Кривая распределения и график функции распределения случайной величины, распределенной по нормальному закону, представлены на рис. 3 *а*, *б*.

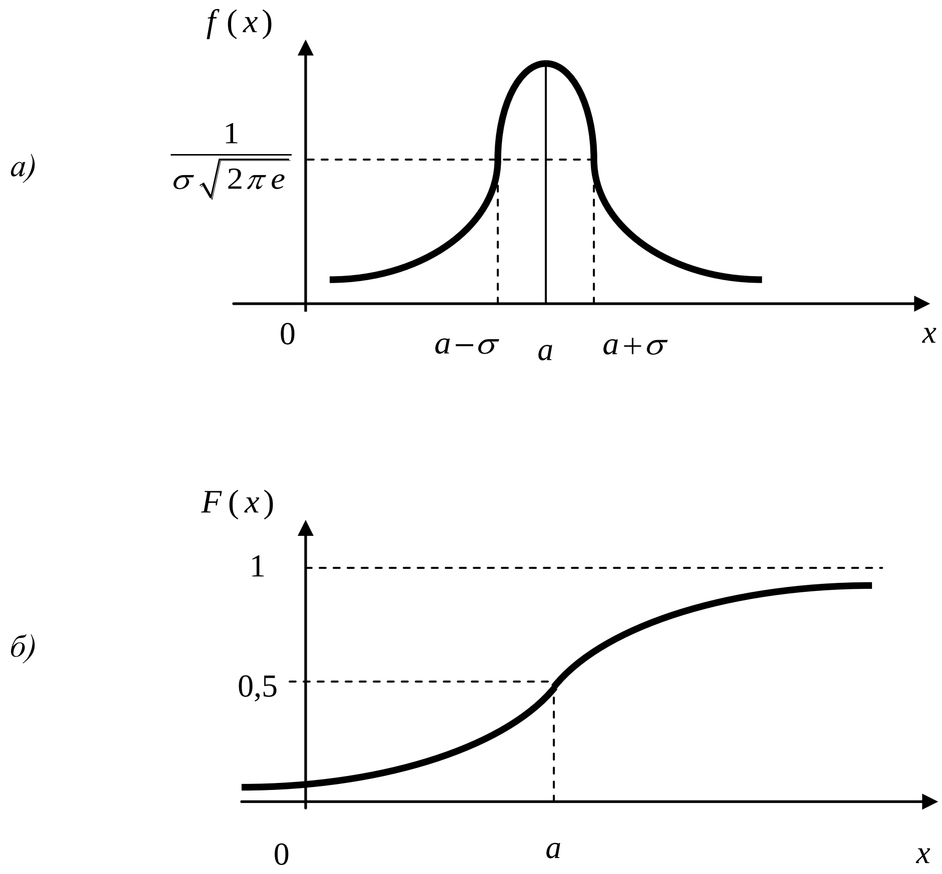


Рис. 3. **Кривая и график функции распределения случайной величины, распределенной по нормальному закону**

Выражение для непосредственного вычисления функции распределения вероятностей случайной величины, распределенной по нормальному закону, с использованием функции Лапласа имеет вид

$$F(x)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по нормальному закону, равны:

$$M(X)=a,\ D(X)=\sigma^2.$$

Решение

Подставляя в выражения для математического ожидания и дисперсия случайной величины, распределенной по равномерному закону, вида

$$M(X)=\frac{a+b}{2},\ D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$$

значения параметров $a=10$ и $b=12$, получим

$$M(X)=\frac{10+12}{2}=11,\ D(X)=\frac{(12-10)^2}{12}=\frac{1}{3}.$$

Номер варианта ответа: 2.

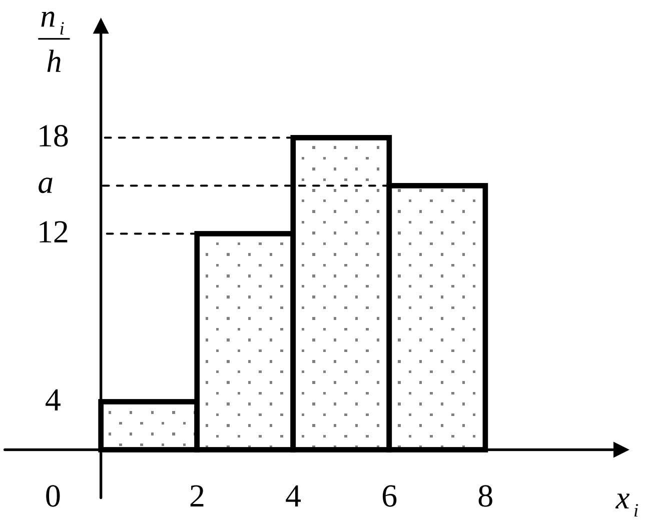
2.2. Типовые задания по математической статистике

Математическая статистика – система основанных на теоретико-вероятностных моделях понятий, приемов и математических методов, предназначенных для сбора, систематизации, истолкования и обработки статистических данных с целью получения научных и практических выводов.

Для самостоятельного изучения математической статистики студентами экономических специальностей можно рекомендовать любой учебник (учебное пособие) из [7-12].

2.2.1. Задание № 21 по теме "Непрерывное распределение признака"

По выборке объема n=100 построена гистограмма частот:



Тогда значение a равно …

Варианты ответов:

1) 17; 2) 16; 3) 66; 4) 15.

Требуется выбрать один вариант ответа.

Краткие теоретические сведения по теме

Установление закономерностей, присущих массовым случайным явлениям основано на изучении **статистических данных** – сведений о том, какие значения принял в результате наблюдения интересующий исследователя признак (случайная величина X).

Сбор статистических данных производится путем проведения **статистического наблюдения** - научно организованного сбора сведений об изучаемых процессах или явлениях путем регистрации заранее определенных существенных признаков.

Статистическое наблюдение по охвату единиц совокупности делится на сплошное и несплошное. **Сплошное наблюдение** – статистическое наблюдение, при котором обследованию подвергаются все без исключения объекты изучаемой совокупности. **Несплошное наблюдение** – статистическое наблюдение, при котором обследованию подвергается лишь часть объектов изучаемой совокупности.

В практике статистического наблюдения чаще применяется несплошное наблюдение, одним из основных видов которого является выборочное наблюдение.

Выборочное наблюдение – вид несплошного наблюдения, при котором признаки регистрируются у отдельных объектов изучаемой совокупности, отобранных с использованием специальных методов, а полученные в процессе обследования результаты с определенным уровнем вероятности распространяются на всю изучаемую совокупность объектов.

Выборочное наблюдение основано на понятиях генеральной совокупности, выборочной совокупности, объема совокупности.

В математической статистике **генеральной совокупностью** называется совокупность всех мыслимых наблюдений (или всех мысленно возможных объектов интересующего исследователя типа), которые могли быть произведены при данном реальном комплексе условий. Данное понятие является условно-математическим, абстрактным и его не следует относить к реальным с совокупностям, подлежащим статистическому исследованию. Поэтому при статистическом исследовании, как правило, используется более простое понятие генеральной совокупности из теории статистики. В теории статистики **генеральной совокупностью** называется вся исходная изучаемая статистическая совокупность объектов.

Выборочной совокупностью (выборкой) называется подмножество объектов, отобранных с использованием вероятностных методов из генеральной совокупности.

Объемом совокупности (генеральной или выборочной) называется число объектов в ней.

Полученные в результате выборочного наблюдения статистические данные представляют собой множество расположенных в беспорядке чисел. Как правило, анализ этого множества чисел не позволяет выявить какую-либо закономерность их изменения. Поэтому статистические данные подвергаются предварительной обработке.

Предварительная обработка статистических данных базируется на использовании следующих основных понятий: вариационный ряд, вариант, частота варианта, относительная частота варианта, статистический ряд, эмпирическая функция распределения, полигон, гистограмма.

Вариационный ряд – последовательность (ряд) значений выборки, расположенных в неубывающем порядке.

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка объемом в n элементов, в которой значение x_1 наблюдалось n_1 раз, значение x_2 - n_2 раз, значение x_k - n_k раз, причем $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$.

Вариантами называются различные значения x_1, x_2, …, x_k признака, появившиеся в процессе наблюдения в выборке.

Частотой n_i варианта x_i называется число, показывающее, сколько раз значение x_i повторяется в выборке.

Относительной частотой (частостью) w_i варианта x_i называется отношение частоты n_i данного варианта к объему выборки, то есть

$$w_i = \frac{n_i}{n},\ i = 1, 2, \ldots, k.$$

Относительная частота (статистическая вероятность) варианта является выборочным аналогом (вычисленным по выборке) вероятности p_i появления значения x_i случайной величины X .

Статистическим рядом (в теории статистики **вариационным рядом**) называется упорядоченный (ранжированный) в порядке возрастания (как правило) или убывания ряд вариантов (или интервалов их значений) с соответствующими им весами (частотами или относительными частотами).

Статистические ряды делятся на дискретные и интервальные.

Дискретный статистический ряд распределения – ряд распределения, построенный на основе отдельных значений количественного дискретного или непрерывного признака.

Дискретный признак – такой количественный признак, числовые значения которого могут отличаться только на некоторую конечную величину (обычно целое число). Между значениями дискретного признака не может быть никаких промежуточных значений, то есть они выражаются определенными целыми или дробными числами.

Непрерывный признак – такой количественный признак, числовые значения которого могут отличаться на сколь угодно малую величину и в определенных границах принимать любые значения.

Дискретный статистический ряд частот – таблица, в первой строке которой в порядке возрастания перечислены варианты, а во второй соответствующие им частоты. В общем случае такая таблица имеет следующий вид.

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_i	$\ldots$	x_k
n_i	n_1	n_2	$\ldots$	n_i	$\ldots$	n_k

Сумма всех частот статистического ряда частот, записанных во второй строке таблицы, равна объему выборки, то есть $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$.

Дискретный статистический ряд относительных частот – таблица, в первой строке которой в порядке возрастания перечислены варианты, а во второй соответствующие им относительные частоты. В общем случае такая таблица имеет следующий вид.

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_i	$\ldots$	x_k
w_i	w_1	w_2	$\ldots$	w_i	$\ldots$	w_k

Сумма всех относительных частот статистического ряда относительных частот, записанных во второй строке таблицы, равна единице, то есть $\sum_{i=1}^{k} w_i = 1$.

Дискретный статистический ряд относительных частот выборки является выборочным аналогом ряда распределения вероятностей случайной величины в теории вероятностей.

Интервальный статистический ряд распределения – ряд распределения, построенный путем объединения отдельных значений количественного дискретного или непрерывного признака в определенные интервалы.

Интервальный статистический ряд частот – таблица, в первой строке которой в порядке возрастания перечислены интервалы изменения вариантов выборки, а во второй соответствующие им частоты. **Интервальный статистический ряд относительных частот** – таблица, в первой строке которой в порядке возрастания перечислены интервалы изменения вариантов выборки, а во второй соответствующие им относительные частоты.

Эмпирической функцией распределения (функцией распределения выборки) $F_n(x)$ называется относительная частота того, что признак (случайная величина X) примет значение, меньшее заранее заданного действительного числа x, то есть

$$F_n(x) = w(X < x).$$

Теоретическая функция распределения вероятностей $F(x)$ генеральной совокупности (случайной величины) и ее эмпирический аналог – эмпирическая функция распределения $F_n(x)$ обладают одинаковыми свойствами. Различие между ними заключается в том, что теоретическая функция $F(x)$ определяет вероятность события $X < x$, а эмпирическая функция $F_n(x)$ определяет относительную частоту этого же события.

Аналитическое выражение для эмпирической функции распределения имеет вид

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 \quad при \quad x \le x_1, \\ \sum\limits_{l=1}^{i-1} w_l \quad при \quad x_{i-1} < x \le x_i, \quad i = 2,3,...,k,. \\ 1 \quad при \quad x > x_k. \end{cases}$$

График эмпирической функции имеет ступенчатый вид.

Для графического изображения дискретных статистических рядов применяется полигон.

Полигоном частот называется ломаная, отрезки которой соединяют точки с координатами (x_1, n_1), (x_2, n_2), … , (x_k, n_k).

Полигоном относительных частот называется ломаная, отрезки которой соединяют точки с координатами (x_1, w_1), (x_2, w_2), … , (x_k, w_k). Полигон относительных частот является выборочным аналогом ряда распределения вероятностей.

Для графического изображения интервальных статистических рядов применяется гистограмма.

Гистограмма частот – ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы (интервалы изменения вариантов выборки) длиною h, а высоты равны отношению n_i / h (**плотность частоты**). Площадь гистограммы частот равна сумме всех частот, то есть объему выборки.

Если середины верхних сторон прямоугольников гистограммы частот соединить отрезками прямой, то получится полигон частот того же распределения.

Гистограмма относительных частот – ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиною h, а высоты равны отношению w_i / h (**плотность относительной частоты**). Площадь гистограммы относительных частот равна сумме всех относительных частот, то есть единице. Гистограмма относительных частот является выборочным аналогом плотности распределения вероятностей непрерывной случайной величины.

Решение

Площадь гистограммы частот S равна сумме всех частот, то есть объему выборки: $S = \sum\limits_{i=1}^{k} n_i = n$.

Площадь гистограммы частот в общем случае определяется выражением

$$S = h \cdot \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{h},$$

где h - длина частичного интервала (основания прямоугольника); $\frac{n_i}{h}$ - высота i-о прямоугольника.

В данном задании $h = 2$, $\frac{n_1}{h} = 4$, $\frac{n_2}{h} = 12$, $\frac{n_3}{h} = 18$, $\frac{n_4}{h} = a$. Тогда

$$S = 2 \cdot (4 + 12 + 18 + a) = 2 \cdot (34 + a) = 68 + 2a.$$

Так как $S = n = 100$, то выражение для нахождения значения a имеет вид $68 + 2a = 100$. Отсюда $a = \frac{100 - 68}{2} = \frac{32}{2} = 16$.

Номер варианта ответа: 2.

2.2.2. Задание № 24 по теме "Точечные оценки параметров распределения: оценка дисперсии"

В результате измерений некоторой физической величины одним прибором (без систематических ошибок) получены следующие результаты (в мм): 11, 13, 15. Тогда несмещенная оценка дисперсии измерений равна …

Варианты ответов:

1) 4; 2) 3; 3) 8; 4) 0.

Требуется выбрать один вариант ответа.

Краткие теоретические сведения по теме

Точечной (статистической) **оценкой** $\tilde{\theta}_n$ неизвестного параметра θ теоретического распределения вероятностей случайной величины X называется любая функция результатов наблюдений X_1, X_2, … , X_n над этой случайной величиной (**статистика**), принимаемая в качестве приближенного значения неизвестного параметра θ, то есть

$$\tilde{\theta}_n = \tilde{\theta}_n(X_1, X_2, ..., X_n).$$

Термин "точечная" означает, что оценка представляет собой число или точку на числовой оси. Нижний индекс n означает, что оценка вычисляется по результатам n наблюдений.

Так как точечная оценка является функцией результатов наблюдений над случайной величиной, то она также является случайной величиной.

Чтобы статистические оценки, являющиеся случайными величинами, давали "хорошие" приближения оцениваемых параметров, они должны удовлетворять ряду требований. Эти требования заключаются в том, что оценка должна быть состоятельной, несмещенной и желательно эффективной.

Оценка $\tilde{\theta}_n$ параметра θ называется **состоятельной**, если при неограниченном увеличении объема выборки n она сходится по вероятности к оцениваемому параметру, то есть если для любого сколь угодно малого положительного числа ε выполняется равенство

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left| \tilde{\theta}_n - \theta \right| < \varepsilon \right) = 1.$$

Сокращенная запись этого равенства (обозначение сходимости по вероятности) имеет вид

$$\tilde{\theta}_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \theta .$$

В случае использования состоятельных оценок оправдывается увеличение объема выборки, так как при этом становятся маловероятными значительные ошибки при оценивании. Поэтому практический смысл имеют только состоятельные оценки. Однако свойство состоятельности является асимптотическим свойством, то есть оно может проявляться при столь больших объемах выборки, которых на практике не встречается.

Оценка $\tilde{\theta}_n$ параметра θ называется **несмещенной**, если ее математическое ожидание при любом объеме выборки n равно оцениваемому параметру, то есть

$$M(\tilde{\theta}_n) = \theta .$$

Смещенной называется оценка, математическое ожидание которой не равно оцениваемому параметру.

Выполнение требования несмещенности гарантирует отсутствие систематических ошибок при оценивании. Несмещенность оценки характеризует ее “доасимптотические” свойства, то есть является показателем ее “хороших” свойств при любом конечном объеме выборки.

Несмещенная оценка $\tilde{\theta}_n$ параметра θ называется **эффективной**, если она имеет наименьшую дисперсию среди всех возможных несмещенных оценок параметра θ, вычисленных по выборкам одного и того же объема n.

Пусть результаты наблюдений $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$ независимы и произведены в одинаковых условиях наблюдений случайной величины.

С вероятностной точки зрения **независимость наблюдений** $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$ случайной величины X означает, что результаты наблюдений $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$ являются независимыми случайными величинами. **Одинаковость условий наблюдений** означает, что каждая из величин $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$ имеет такой же закон распределения вероятностей, как и наблюдаемая случайная величина X, то есть

$$M(X_1) = M(X_2) = \ldots = M(X_n) = M(X) \ ,$$

$$D(X_1) = D(X_2) = \ldots = D(X_n) = D(X) \ .$$

В условиях независимых и проводимых в одинаковых условиях наблюдений имеют место следующие теоремы.

1. **Выборочное среднее** (среднее арифметическое), вычисляемое по формуле

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

является состоятельной и несмещенной оценкой математического ожидания $M(X)$ случайной величины X (генеральной совокупности).

Эффективность или не эффективность оценки зависит от вида закона распределения вероятностей случайной величины.

2. Если случайная величина X распределена в соответствии с нормальным законом, то выборочное среднее $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ является состоятельной, несмещенной и эффективной оценкой математического ожидания $M(X)$.

3. **Выборочная дисперсия**, определяемая по формуле

$$\tilde{D}(X)=\tilde{\sigma}^2(X)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

является состоятельной, смещенной оценкой дисперсии $D(X)$ случайной величины X. Поэтому она называется **смещенной оценкой дисперсии**.

4. **Исправленная выборочная дисперсия**, определяемая по формуле

$$s^2(X)=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

является состоятельной и несмещенной оценкой дисперсии $D(X)$ случайной величины X. Поэтому она называется **несмещенной оценкой дисперсии**.

5. Состоятельная, несмещенная и эффективная оценка дисперсии $D(X)$ нормально распределенной случайной величины с известным параметром a имеет вид

$$s_0^2(X)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-a)^2 .$$

В данную формулу входит математическое ожидание a, которое, как правило, заранее не известно, поэтому эта оценка практически не используется.

Решение

Выражение для несмещенной оценки дисперсии имеет вид

$$s^2(X)=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 ,$$

где $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ - выборочное среднее.

В данном задании n = 3, X_1 = 11 мм, X_2 = 13 мм, X_3 = 15 мм. Поэтому выборочное среднее равно

$$\bar{X}=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}X_i=\frac{1}{3}(X_1+X_2+X_3)=\frac{1}{3}(11+13+15)=\frac{1}{3}\cdot 39=13 \text{ мм.}$$

Тогда несмещенная оценка дисперсии равна

$$s^2(X)=\frac{1}{3-1}\sum_{i=1}^{3}(X_i-\bar{X})^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(X_i-13)^2=$$

$$=\frac{1}{2}[(X_1-13)^2+(X_2-13)^2+(X_3-13)^2]=$$

$$=\frac{1}{2}[(11-13)^2+(13-13)^2+(15-13)^2]=\frac{1}{2}[(-2)^2+(0)^2+(2)^2]=$$

$$=\frac{1}{2}[4+0+4]=\frac{1}{2}\cdot 8=4 \text{ мм}^2.$$

Номер варианта ответа: 1.

2.2.3. Задание № 23 по теме “Интервальные оценки параметров распределения”

Точечная оценка математического ожидания нормального распределения равна 10. Тогда его интервальная оценка может иметь вид …

Варианты ответов:

1) (8,4; 10); 2) (8,5; 11,5); 3) (8,6; 9,6); 4) (10; 10,9).

Требуется выбрать один вариант ответа.

Краткие теоретические сведения по теме

При определении точечной оценки по результатам малого количества наблюдений (n < 30 … 50) свойства состоятельности, несмещенности и эффективности могут не выполняться, то есть точечная оценка может значительно отличаться от оцениваемого параметра. По этой причине при небольшом объеме выборки вычисляют интервальную оценку, которая определяется двумя числами – границами интервала, внутри которого с определенной вероятностью находится неизвестное значение оцениваемого параметра θ. Интервальная оценка позволяет установить точность и надежность точечной оценки.

Интервальной оценкой (доверительным интервалом) называется числовой интервал $(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)$, который с заданной вероятностью γ заключает в себе (накрывает) неизвестное значение оцениваемого параметра θ.

Числа $\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2$ называются **доверительными границами**.

Точностью оценки (доверительного интервала) называется такое наименьшее число $\delta > 0$, что для любой точки доверительного интервала $\theta \in (\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)$ выполняется условие $\left|\tilde{\theta} - \theta\right| < \delta$.

Доверительной вероятностью или **надежностью оценки** называется вероятность γ, с которой осуществляется неравенство $\left|\tilde{\theta} - \theta\right| < \delta$.

Как правило, доверительный интервал выбирается симметричным относительно точечной оценки $\tilde{\theta}_n$ неизвестного параметра θ. В этом случае интервальная оценка представляет интервал вида $(\tilde{\theta}_n - \delta, \tilde{\theta}_n + \delta)$, доверительными границами являются числа $\tilde{\theta}_n - \delta, \tilde{\theta}_n + \delta$, а доверительный вероятность равна

$$\gamma = P\left(\left|\tilde{\theta}_n - \theta\right| < \delta\right) \text{ или } \gamma = P(\tilde{\theta}_n - \delta < \theta < \tilde{\theta}_n + \delta).$$

Доверительные границы $\tilde{\theta}_n - \delta, \tilde{\theta}_n + \delta$ являются случайными величинами, так как точечная оценка $\tilde{\theta}_n$ является случайной величиной. Поэтому эти границы могут измениться при расчете точечной оценки по данным другой выборки из этой же генеральной совокупности. Кроме того, величина доверительного интервала существенно зависит от объема выборки n (уменьшается с ростом n) и от значения доверительной вероятности γ (увеличивается с приближением γ к единице), так как точность оценки δ выбирается в зависимости от величины доверительной вероятности.

Интервальные оценки математического ожидания, среднего квадратического отклонения и дисперсии нормально распределенной случайной величины при разных сведениях о ее параметрах имеют вид:

1) $\left(\bar{X} - u_\gamma \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + u_\gamma \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ - для неизвестного математического ожидания a при известной дисперсии σ^2 (коэффициент доверия u_γ выборочной средней $\bar{X}$ определяется из равенства $\Phi(u_\gamma) = \gamma / 2$ следующим образом: по таблице значений функции Лапласа находят аргумент u_γ, которому соответствует значение функции Лапласа, равное $\gamma / 2$; точность выборочной средней $\bar{X}$ равна $\delta = u_\gamma \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$);

2) $\left(\bar{X} - t_\gamma \cdot \dfrac{s}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_\gamma \cdot \dfrac{s}{\sqrt{n}}\right)$ - для неизвестного математического ожидания a при неизвестной дисперсии σ^2 (коэффициент доверия t_γ выборочной средней определяется либо по таблице критических точек распределения Стьюдента для двусторонней критической области с числом степеней свободы, равным $k = n - 1$, на уровне значимости $\alpha = 1 - \gamma$, либо по таблице зависимости $t_\gamma = t(\gamma, n)$, приведенной в приложении 3 к [7, 8]; s - исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение; точность выборочной средней $\bar{X}$ равна $\delta = t_\gamma \cdot \dfrac{s}{\sqrt{n}}$);

3) $(max\{0, [s - s \cdot q_\gamma]\}, [s + s \cdot q_\gamma])$ для неизвестного среднего квадратического отклонения σ при неизвестном математическом ожидании a (коэффициент доверия q_γ исправленного выборочного среднего квадратического отклонения определяется по таблице зависимости $q_\gamma = q(\gamma, n)$, приведенной в приложении 4 к [7, 8]);

4) $([max\{0, [s - s \cdot q_\gamma]\}]^2, [s + s \cdot q_\gamma]^2)$ для неизвестной дисперсии σ^2 при неизвестном математическом ожидании a.

Решение

В общем случае любая интервальная оценка, симметричная относительно точечной оценки $\tilde{\theta}_n$ неизвестного параметра θ, имеет вид $(\tilde{\theta}_n - \delta, \tilde{\theta}_n + \delta)$. Следовательно, интервальная оценка математического нормально распределенной случайной величины, симметричная относительно выборочной средней $\bar{X}$, имеет вид $(\bar{X} - \delta, \bar{X} + \delta)$.

В данном задании $\bar{X}$ = 10. Поэтому интервальная оценка математического ожидания имеет вид $(10 - \delta, 10 + \delta)$.

Приравнивая правую и левую границы интервальной оценки общего вида $(10 - \delta, 10 + \delta)$ к аналогическим границам интервальной оценки в каждом варианте ответа, получим.

1-й вариант. Приравнивая левые границы, получим $10 - \delta$ = 8,4. Отсюда δ = 1,6. Приравнивая правые границы, получим $10 + \delta$ = 10. Отсюда δ = 0.

Вывод: данная интервальная оценка не может быть интервальной оценкой данной случайной величины, так как: 1) интервал не симметричен относительно $\bar{X}$ (получились разные точности оценок); 2) точность оценки, полученная путем приравнивания правых границ, оказалась равной нулю, чего не может быть по определению точности оценки ($\delta > 0$).

2-й вариант. Приравнивая левые границы, получим $10 - \delta$ = 8,5. Отсюда δ = 1,5. Приравнивая правые границы, получим $10 + \delta$ = 11,5. Отсюда δ = 1,5.

Вывод: данная интервальная оценка может быть интервальной оценкой данной случайной величины, так как интервал симметричен относительно $\bar{X}$ (получились одинаковые точности оценок).

3-й вариант. Приравнивая левые границы, получим $10 - \delta$ = 8,6. Отсюда δ = 1,4. Приравнивая правые границы, получим $10 + \delta$ = 9,6. Отсюда δ = -0,4.

Вывод: данная интервальная оценка не может быть интервальной оценкой данной случайной величины, так как: 1) интервал не симметричен относительно $\bar{X}$ (получились разные точности оценок); 2) точность оценки, полученная путем приравнивания правых границ, оказалась отрицательной, чего не может быть по определению точности оценки ($\delta > 0$).

Примечание: данный вариант можно было не анализировать вообще, так как выборочное среднее ($\bar{X}$ = 10) не принадлежит интервалу, чего не может быть по определению интервальной оценки.

4-й вариант. Приравнивая левые границы, получим $10 - \delta$ = 10. Отсюда δ = 0. Приравнивая правые границы, получим $10 + \delta$ = 10,9. Отсюда δ = 0,9.

Вывод: данная интервальная оценка не может быть интервальной оценкой данной случайной величины, так как: 1) интервал не симметричен относительно $\bar{X}$ (получились разные точности оценок); 2) точность оценки, полученная путем приравнивания левых границ, оказалась равной нулю, чего не может быть по определению точности оценки ($\delta > 0$).

Номер варианта ответа: 2.

2.2.4. Задание № 22 по теме “Проверка статистических гипотез”

Если основная гипотеза имеет вид $H_0 : a = 20$, то конкурирующей может быть гипотеза …

Варианты ответов:

1) $H_1 : a \geq 20$; 2) $H_1 : a > 20$; 3) $H_1 : a \geq 10$; 4) $H_1 : a \leq 20$.

Требуется выбрать один вариант ответа.

Краткие теоретические сведения по теме

Статистической гипотезой называется любое предположение о генеральной совокупности (случайной величине), проверяемое по выборке (результатам наблюдений).

Проверкой статистической гипотезы называется процедура сопоставления сформулированной гипотезы с выборочными данными.

По прикладному содержанию можно выделить следующие основные виды гипотез, высказываемых в ходе статистической обработки данных:

1) о типе закона распределения вероятностей случайной величины;

2) о числовых значениях параметров распределения вероятностей случайной величины;

3) об однородности (равенстве распределений вероятностей) двух или нескольких генеральных совокупностей;

4) о равенстве числовых значений параметров распределения вероятностей двух или нескольких генеральных совокупностей;

5) о независимости элементов выборки и другие.

Нулевой (основной) гипотезой (обозначается H_0) называется проверяемая гипотеза.

Альтернативной (конкурирующей) гипотезой (обозначается H_1) называется статистическая гипотеза, противоречащая нулевой гипотезе и принимаемая, если отвергается нулевая гипотеза. Альтернативная гипотеза является логическим отрицанием нулевой гипотезы.

Нулевая и альтернативная гипотезы представляют собой две возможности выбора, осуществляемого в задачах проверки статистических гипотез.

Например, если нулевая гипотеза состоит в предположении, что математическое ожидание a нормально распределенной случайной величины равно 0, то альтернативная гипотеза может состоять в предположении, что $a \neq 0$. Сокращенная запись гипотез в этом случае имеет вид: $H_0 : a = 0$, $H_1 : a \neq 0$.

Различают также гипотезы, которые содержат одно или несколько предположений.

Простая гипотеза – гипотеза, содержащая только одно предположение. Например, гипотеза $H_0 : a = 0$ (математическое ожидание нормально распределенной случайной величины равно 0 при известной дисперсии) является простой.

Сложная гипотеза – гипотеза, состоящая из конечного или бесконечного числа простых гипотез. Например, гипотеза $H_0 : a > 0$ (математическое ожидание нормально распределенной случайной величины больше 0 при известной дисперсии) является сложной. Она состоит из бесконечного числа простых гипотез вида $H_i : a = b_i$, где b_i - любое число, большее 0. Гипотеза $H_0 : a = 0$ (математическое ожидание нормально распределенной случайной величины равно 0 при неизвестной дисперсии) также является сложной.

Так как решение о справедливости нулевой гипотезы для генеральной совокупности принимается по выборочным данным, то оно может быть ошибочным. При этом могут быть допущены ошибки двух родов.

Ошибка первого рода – ошибка, заключающаяся в том, что нулевая гипотеза отвергается, тогда как в действительности она верна.

Ошибка второго рода – ошибка, состоящая в том, что нулевая гипотеза не отвергается, тогда как в действительности она неверна.

Вероятность ошибки первого рода, называемая **уровнем значимости** или **размером критерия**, обозначается буквой α, то есть $\alpha = P_{H_0}(H_1)$.

Вероятность ошибки второго рода обозначается буквой β, то есть $\beta = P_{H_1}(H_0)$.

Правильное решение при проверке нулевой гипотезы также может быть двух видов:

1) принятие нулевой гипотезы H_0, когда и в действительности она имеет место в генеральной совокупности, с вероятностью $P_{H_0}(H_0) = 1 - P_{H_0}(H_1) = 1 - \alpha$;

2) отклонение нулевой гипотезы H_0 (то есть принятие альтернативной гипотезы H_1), когда и в действительности гипотеза H_0 неверна, с вероятностью $P_{H_1}(H_1)=1-P_{H_1}(H_0)=1-\beta$, называемой **мощностью критерия**

Перечисленные возможные варианты решений при проверке нулевой гипотезы и их вероятности объединены в табл. 3.

Таблица 3

Варианты решений при проверке нулевой гипотезы и их вероятности

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="2">Решение, принимаемое о гипотезе H_0 по выборке</td></tr>
<tr><td>H_0 отвергается (принимается H_1)</td><td>H_0 принимается</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Справедливость нулевой гипотезы в действительности</td><td>H_0 верна</td><td>Ошибка первого рода с вероятностью $P_{H_0}(H_1)=\alpha$</td><td>Правильное решение с вероятностью $P_{H_0}(H_0)=1-\alpha$</td></tr>
<tr><td>H_0 неверна (верна H_1)</td><td>Правильное решение с вероятностью $P_{H_1}(H_1)=1-\beta$</td><td>Ошибка второго рода с вероятностью $P_{H_1}(H_0)=\beta$</td></tr>
</table>

Проверка статистической гипотезы производится с использованием статистического критерия.

Статистическим критерием (статистикой критерия) называется случайная величина φ, которая служит для проверки нулевой гипотезы по выборочным данным $X_1,\ X_2,\ \dots,\ X_n$ и удовлетворяет следующим требованиям:

1) ее значения зависят от выборочных данных, то есть $\varphi=\varphi(X_1, X_2,\dots, X_n)$;

2) ее значения позволяют судить о расхождении выборочных данных с гипотезой H_0;

3) она при справедливости H_0 распределена в соответствии с известным законом распределения.

Значение статистического критерия, вычисленное по конкретным выборочным данным $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n$ называется **наблюдаемым** (или **расчетным**).

Для проверки статистической гипотезы с использованием статистического критерия множество его возможных значений разделяется на два непересекающихся подмножества:

1) **критическую область**, то есть подмножество значений критерия, при которых нулевая гипотеза отвергается;

2) **область принятия гипотезы (область допустимых значений)**, то есть подмножество значений критерия, при которых нулевая гипотеза принимается.

Критическая область выбирается исходя из двух условий:

1) вероятность совершить ошибку первого рода не должна превосходить заранее заданного уровня значимости α, то есть вероятность того, что критерий φ примет значение из критической области ω должна удовлетворять условию $P(\varphi\in\omega)\le\alpha$;

2) вероятность ошибки второго рода β при заданном уровне значимости α должна быть минимальной.

Так как критерий φ представляет собой одномерную случайную величину, то все его возможные значения принадлежат некоторому интервалу. Поэтому критическая область и область принятия гипотезы также являются интервалами, отделенными друг от друга граничными точками.

Критическими точками называются граничные точки, отделяющие критическую область от области принятия гипотезы.

Возможны три вида расположения критической области в зависимости от вида нулевой и альтернативной гипотез:

1) **правосторонняя критическая область** (рис. 4, *а*), состоящая из интервала $(x_{пр,\,\alpha}^{кр}, +\infty)$, в котором точка $x_{пр,\,\alpha}^{кр}$ определяется из условия $P(\varphi > x_{пр,\,\alpha}^{кр}) = \alpha$ и называется **правосторонней критической точкой**, соответствующей уровню значимости α;

2) **левосторонняя критическая область** (рис. 4, *б*), состоящая из интервала $(-\infty, x_{лев,\,\alpha}^{кр})$, в котором точка $x_{лев,\,\alpha}^{кр}$ определяется из условия $P(\varphi < x_{лев,\,\alpha}^{кр}) = \alpha$ и называется **левосторонней критической точкой**, соответствующей уровню значимости α;

3) **двусторонняя критическая область** (рис. 4, *в*), состоящая из двух интервалов $(-\infty, x_{лев,\,\frac{\alpha}{2}}^{кр})$ и $(x_{пр,\,\frac{\alpha}{2}}^{кр}, +\infty)$, в которых точки $x_{лев,\,\frac{\alpha}{2}}^{кр}$ и $x_{пр,\,\frac{\alpha}{2}}^{кр}$ определяются из условий $P(\varphi < x_{лев,\,\frac{\alpha}{2}}^{кр}) = \dfrac{\alpha}{2}$, $P(\varphi > x_{пр,\,\frac{\alpha}{2}}^{кр}) = \dfrac{\alpha}{2}$ и называются **двусторонними критическими точками**.

Например, при проверке нулевой гипотезы $H_0: \theta = a$ (параметр распределения вероятностей θ равен числу a) против альтернативной гипотезы:

а) $H_1: \theta > a$ используется правосторонняя критическая область;

б) $H_1: \theta < a$ используется левосторонняя критическая область;

в) $H_1: \theta \neq a$ используется двусторонняя критическая область.

Логическая схема проверки статистической гипотезы включает 5 следующих этапов:

1) формулировка нулевой (H_0) и альтернативной (H_1) гипотез на основе выборочных данных X_1, X_2, … , X_n и конкретных условий рассматриваемой задачи;

2) задание уровня значимости критерия α;

3) выбор статистического критерия $\varphi(X_1, X_2, ..., X_n)$;

4) нахождение критической точки (точек) для выбранного критерия по соответствующей этому критерию таблице критических точек по заданному уровню значимости;

5) вычисление наблюдаемого значения критерия $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$ и проверка принадлежности этого значения критической области: если наблюдаемое значение критерия попадает в критическую область, то нулевая гипотеза H_0 отвергается с уровнем значимости α и принимается альтернативная гипотеза H_1; в противном случае нулевая гипотеза принимается (не отвергается).

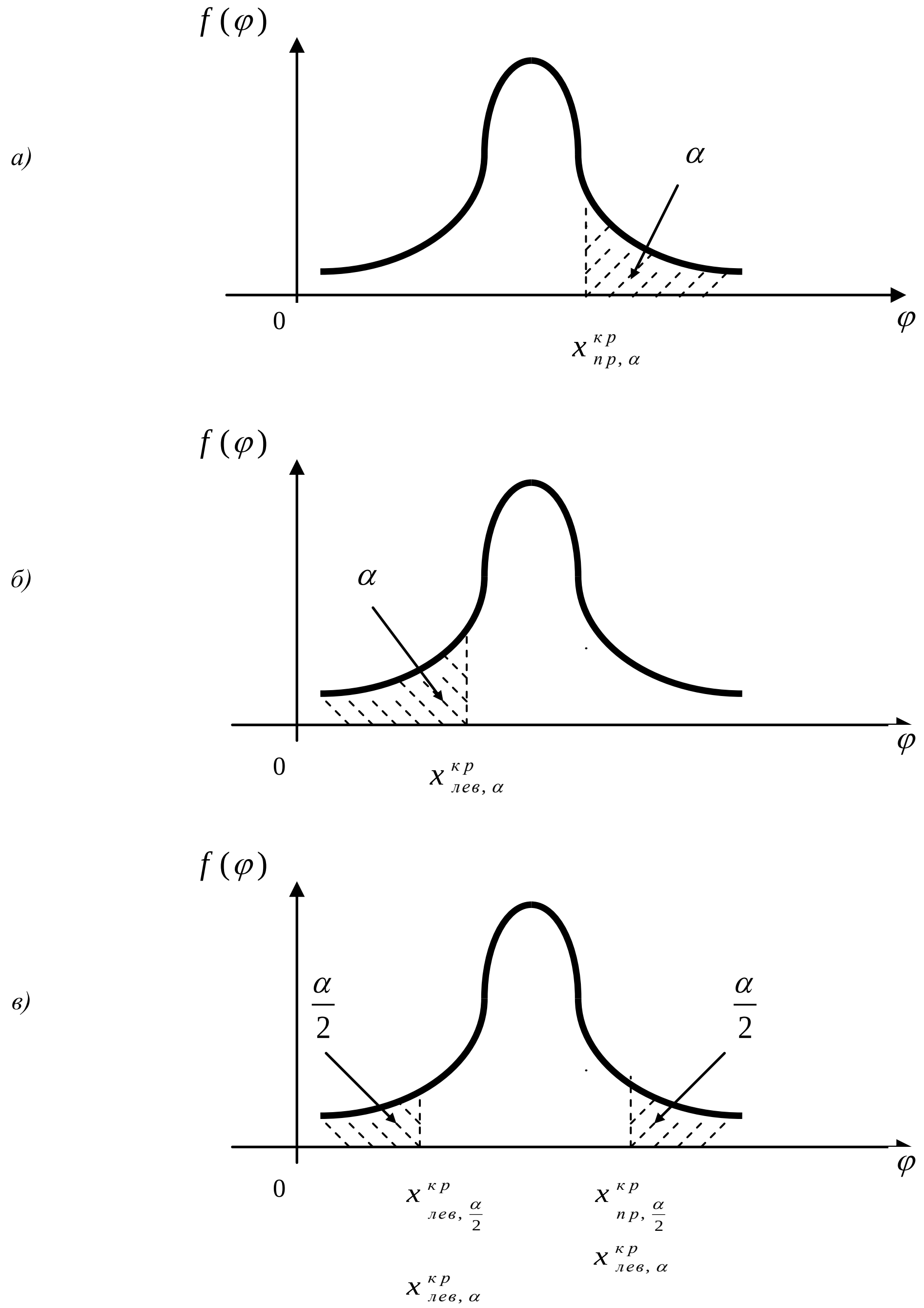


Рис. 4. **Виды расположения критической области**

Некоторые статистические критерии для проверки гипотез о параметрах нормально распределенных случайных величин и выражения для их критических областей при разных вариантах альтернативной гипотезы приведены в табл. 4.

Таблица 4

Статистические критерии и их критические области

Предположения	Критерий	H_1	Критическая область
$H_0: a = a_0$ (математическое ожидание $M(X) = a$ величины X равно числу a_0)			
Дисперсия $D(X) = \sigma^2$ известна	$U = \dfrac{\bar{X} - a_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n}$	$a > a_0$	$U_{набл} > u_{пр,\alpha}^{кр}$, $\Phi(u_{пр,\alpha}^{кр}) = \dfrac{1 - 2\alpha}{2}$
		$a < a_0$	$U_{набл} < -u_{пр,\alpha}^{кр}$
		$a \neq a_0$	$\left\vert U_{набл} \right\vert > u_{пр,\frac{\alpha}{2}}^{кр}$, $\Phi(u_{пр,\frac{\alpha}{2}}^{кр}) = \dfrac{1 - \alpha}{2}$
Дисперсия $D(X)$ не известна	$T = \dfrac{\bar{X} - a_0}{s} \cdot \sqrt{n}$	$a > a_0$	$T_{набл} > t_{пр}^{кр}(\alpha, k)$ для односторонней области, $k = n - 1$
		$a < a_0$	$T_{набл} < -t_{пр}^{кр}(\alpha, k)$ для односторонней области, $k = n - 1$
		$a \neq a_0$	$\left\vert T_{набл} \right\vert > t_{пр}^{кр}(\alpha, k)$ для двусторонней области, $k = n - 1$
$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ (дисперсия $D(X) = \sigma^2$ величины X равно числу σ_0^2)			
Математическое ожидание $M(X)$ не известно	$\chi^2 = \dfrac{(n-1)\, s^2}{\sigma_0^2}$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$	$\chi_{набл}^2 > \chi_{\alpha; n-1}^2$
		$\sigma^2 < \sigma_0^2$	$\chi_{набл}^2 < \chi_{1-\alpha; n-1}^2$
		$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$(\chi_{набл}^2 < \chi_{1-\alpha/2; n-1}^2) \cup (\chi_{набл}^2 > \chi_{\alpha/2; n-1}^2)$

Продолжение табл. 4

Предпо-ложения	Критерий	H_1	Критическая область
$H_0: M(X) = M(Y)$ (математические ожидания величин X и Y равны)			
Диспер-сии $D(X)$ и $D(Y)$ известны	$U = \dfrac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\dfrac{D(X)}{n} + \dfrac{D(Y)}{m}}}$	$M(X) > M(Y)$	$U_{набл} > u^{кр}_{пр,\alpha}$, $\Phi(u^{кр}_{пр,\alpha}) = \dfrac{1-2\alpha}{2}$
		$M(X) < M(Y)$	$U_{набл} < -u^{кр}_{пр,\alpha}$
		$M(X) \neq M(Y)$	$\left\|U_{набл}\right\| > u^{кр}_{пр,\frac{\alpha}{2}}$, $\Phi(u^{кр}_{пр,\frac{\alpha}{2}}) = \dfrac{1-\alpha}{2}$
Диспер-сии $D(X)$ и $D(Y)$ неизвест-ны, $D(X) =$ $= D(Y)$, $n < 30$, $m < 30$	$T = \dfrac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{(n-1)\, s_x^2 + (m-1)\, s_x^2}} \times$ $\times \sqrt{\dfrac{nm(n+m-2)}{n+m}}$	$M(X) > M(Y)$	$T_{набл} > t^{кр}_{пр}(\alpha, k)$ для односторонней обла-сти, $k = n + m - 2$
		$M(X) < M(Y)$	$T_{набл} < -t^{кр}_{пр}(\alpha, k)$ для односторонней области, $k = n + m - 2$
		$M(X) \neq M(Y)$	$\left\|T_{набл}\right\| > t^{кр}_{пр}(\alpha, k)$ для двусторонней об-ласти, $k = n + m - 2$
Диспер-сии $D(X)$ и $D(Y)$ неизвест-ны, $D(X) \neq$ $\neq D(Y)$, $n < 30$, $m < 30$	$T = \dfrac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\dfrac{s_x^2}{n} + \dfrac{s_y^2}{m}}}$	$M(X) > M(Y)$	$T_{набл} > t^{кр}_{пр}(\alpha, k')$ для односторонней обла-сти, $k' = \dfrac{\left(\dfrac{s_x^2}{n} + \dfrac{s_y^2}{m}\right)^2}{\dfrac{\left(\dfrac{s_x^2}{n}\right)^2}{n-1} + \dfrac{\left(\dfrac{s_y^2}{m}\right)^2}{m-1}}$ (округляется до бли-жайшего целого)
		$M(X) < M(Y)$	$T_{набл} < -t^{кр}_{пр}(\alpha, k')$ для односторонней области
		$M(X) \neq M(Y)$	$\left\|T_{набл}\right\| > t^{кр}_{пр}(\alpha, k')$ для двусторонней об-ласти

Окончание табл. 4

Предпо-ложения	Критерий	H_1	Критическая область
$H_0: D(X) = D(Y)$ (дисперсии величин X и Y равны)			
Матема-тические ожидания $M(X)$ и $M(Y)$ не из-вестны	$F = \frac{s_x^2}{s_y^2}$, $s_x^2 > s_y^2$	$D(X) > D(Y)$	$F_{набл} > F_{кр}(\alpha, k_1, k_2)$, $k_1 = n-1$, $k_2 = m-1$
		$D(X) \neq D(Y)$	$F_{набл} > F_{кр}(\frac{\alpha}{2}, k_1, k_2)$, $k_1 = n-1$, $k_2 = m-1$

Значения критических точек U-критерия (иногда он обозначается буквой Z)) находят по таблице значений функции Лапласа Φ (например, приложение 2 к [7, 8]).

Критерии, обозначенные буквой T, называются **критериями Стьюдента**. Значения их критических точек t находят по таблице критических точек распределения Стьюдента (например, приложение 6 к [7, 8]).

Критерий, обозначенный буквой F, называется **критерием Фишера-Снедекора**. Значения его критических точек $F_{кр}$ находят по таблице критических точек Фишера-Снедекора (например, приложение 7 к [7, 8]).

Критерий, обозначенный буквой χ^2, называется **критерием хи-квадрат**. Значения его критических точек находят по таблице критических точек распределения χ^2 (например, приложение 5 к [7, 8]).

В таблицах критических точек критериев приводятся значения правосторонних критических точек. Поэтому выражения для критических областей в табл. 4 приведены с использованием этих критических точек.

Решение

Альтернативной (конкурирующей) гипотезой называется статистическая гипотеза, противоречащая нулевой гипотезе. Альтернативная гипотеза является логическим отрицанием нулевой гипотезы.

Поэтому в рассматриваемых в данном задании гипотезах о числовом значении параметра a числовые множества, задаваемые гипотезами, не должны пересекаться.

Найдем пересечение числовых множеств, задаваемых гипотезами, для каждого варианта ответа.

1-й вариант: $\{20\} \cap \{a \mid a \geq 20\} = 20$.

2-й вариант: $\{20\} \cap \{a \mid a > 20\} = \varnothing$.

3-й вариант: $\{20\} \cap \{a \mid a \geq 10\} = 20$.

4-й вариант: $\{20\} \cap \{a \mid a \leq 20\} = 20$.

Анализ пересечений числовых множеств, задаваемых гипотезами, показывает, что эти множества не пересекаются только во 2-м варианте ответа.

Номер варианта ответа: 2.

2.3. Типовые задания по экономико-математическим методам

Экономико-математические методы – комплекс научных дисциплин на стыке экономики с математикой и кибернетикой (наукой, изучающей процессы управления в технических, биологических и социальных системах).

Экономико-математические методы включают в себя аналитические, численные и экспериментальные методы принятия решений. Их классификация и суть рассмотрены в [13].

Студенты специальности "Национальная экономика " в соответствии с ГОС в рамках дисциплины "Математика" изучают только отдельные разделы математического программирования (совокупность численных методов принятия оптимальных решений).

Математическое программирование – область математики, разрабатывающая теорию и численные методы решения многомерных экстремальных задач с ограничениями, то есть задач на экстремум функции многих переменных с ограничениями на область изменения этих переменных. Основными разделами математического программирования являются: линейное программирование, нелинейное программирование, динамическое программирование, дискретное программирование, параметрическое программирование, сепарабельное программирование, стохастическое программирование, геометрическое программирование, дробно-линейное программирование.

Студенты специальности "Национальная экономика " в рамках дисциплины "Математика" изучают следующие разделы математического программирования:

1) **линейное программирование** – область математики, разрабатывающая теорию и численные методы нахождения экстремума (максимума или минимума) линейной функции многих переменных при наличии линейных ограничений, то есть линейных равенств или неравенств, связывающих эти переменные;

2) **дискретное программирование** – часть математического программирования, в которой исследуются и решаются экстремальные задачи на целочисленных решетках и конечных множествах;

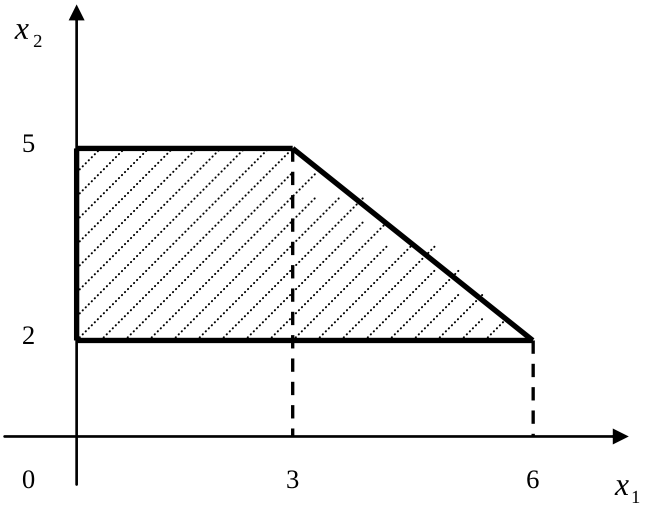
3) **динамическое программирование** – область математики, разрабатывающая теорию и численные методы решения многошаговых задач оптимального управления, в которых используется последовательное принятие решений;

4) **нелинейное программирование** – раздел математического программирования, изучающий задачи отыскания глобального экстремума фиксированной (целевой) функции при наличии ограничений в ситуации, когда целевая функция и ограничения имеют общий характер (не предполагаются линейными).

Для самостоятельного изучения данных разделов математического программирования студентами экономических специальностей можно рекомендовать учебники (учебные пособия) [14-16].

2.3.1. Задание № 25 по теме “Линейное программирование: графическое задание области допустимых решений”

Область допустимых решений задачи линейного программирования имеет вид:



Тогда максимальное значение функции $z = x_1 + 2x_2$ равно …

Варианты ответов:

1) 13; 2) 14; 3) 11; 4) 10.

Требуется выбрать один вариант ответа.

Краткие теоретические сведения по теме

Задача линейного программирования представляет собой задачу на нахождение условного экстремума функции и в общем случае имеет вид

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_j x_j + \ \ldots + c_n x_n \to extr,$$

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1j} x_j + \ \ldots + a_{1n} x_n \, [\le, <, =, \ge, >] \, b_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2j} x_j + \ \ldots + a_{2n} x_n \, [\le, <, =, \ge, >] \, b_2, \\ \qquad \ldots \\ a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{ij} x_j + \ \ldots + a_{in} x_n \, [\le, <, =, \ge, >] \, b_i, \\ \qquad \ldots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mj} x_j + \ \ldots + a_{mn} x_n \, [\le, <, =, \ge, >] \, b_m, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_j \ge 0, \ \ldots, x_n \ge 0, \end{cases}$$

где - n - число переменных;

m - число ограничений;

a_{ij}, b_i, c_j, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, - заданные константы;

$[\le, <, =, \ge, >]$ - обозначение того факта, что в каждом ограничении может быть любой из перечисленных в квадратных скобках знаков неравенств или знак равенства (разные ограничения могут иметь разные знаки).

Функция z называется **целевой функцией**. В задачах производственно-экономического характера целевая функция чаще всего представляет собой подлежащие максимизации прибыль или минимизации затраты.

Система ограничений сужает область допустимых значений управляемых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n$, значения которых подлежат определению. В качестве таких ограничений, например, в задаче оптимального распределения ресурсов выступают соотношения между количествами выпускаемой продукции $x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n$ различных видов и запасами ресурсов b_i, $i = 1, \ldots, m$, которыми располагает предприятие в планируемом периоде.

Тогда рассматриваемая задача может быть сформулирована как задача определения такого плана выпуска продукции $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_j^*, \ldots, x_n^*$, при котором прибыль предприятия z будет максимальной и выполняется система ограничений.

В общем случае **словесная формулировка задачи линейного программирования** заключается в следующем: необходимо найти такие неотрицательные значения $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_j^*, \ldots, x_n^*$ неизвестных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n$, которые удовлетворяют системе ограничений и придают целевой функции экстремальное значение.

В простейшем случае, когда задача линейного программирования содержит всего две переменные (или когда число переменных n на два больше, чем число ограничений m ($n - m = 2$)), она может быть решена графическим (геометрическим) методом.

Геометрический смысл задачи линейного программирования состоит в нахождении такой точки области допустимых решений, в которой целевая функция принимает экстремальное значение.

Область допустимых решений задачи линейного программирования – это множество точек плоскости, координаты которых удовлетворят всем m ограничениям, то есть точки, которые одновременно принадлежат всем m полуплоскостям, задаваемым ограничениями, и геометрически изображаются пересечением этих полуплоскостей.

Существует две разновидности графического метода решения задачи линейного программирования:

1) графический метод, использующий понятия нормального вектора (градиента) целевой функции и линии уровня целевой функции;

2) графический метод, основанный на вычислении значений целевой функции во всех вершинах области допустимых решений и выборе той из них, в которой целевая функция принимает экстремальное значение.

Так как первый метод в ряде случаев требует точных геометрических построений, рассмотрим второй метод.

Алгоритм решения задачи линейного программирования графическим методом на основе вычисления значений целевой функции во всех вершинах области допустимых решений включает следующие этапы.

1. Построение в декартовой системе координат на плоскости граничных прямых, уравнения которых получаются в результате замены в ограничениях знаков неравенств на знаки точных равенств.
2. Нахождение полуплоскостей, определяемых каждым из ограничений.
3. Определение области допустимых решений.
4. Вычисление координат всех вершин области допустимых решений.
5. Вычисление значений целевой функции во всех вершинах области допустимых решений.
6. Выбор в качестве решения задачи линейного программирования той вершины области допустимых решений, в которой целевая функция принимает экстремальное значение.

Решение

В данной задаче первые четыре этапа решения задачи линейного программирования рассмотренным графическим методом уже выполнены, то есть область допустимых решений определена и известны координаты ее вершин: *A* (0,2), *B* (6,2), *C* (3,5), *D*(0,5). В задании обозначений вершин буквами нет. Они введены для удобства решения.

5-й этап. Вычисление значений целевой функции во всех вершинах области допустимых решений:

$$z^A = z(0,2) = x_1^A + 2x_2^A = 0 + 2 \cdot 2 = 0 + 4 = 4,$$
$$z^B = z(6,2) = x_1^B + 2x_2^B = 6 + 2 \cdot 2 = 6 + 4 = 10,$$
$$z^C = z(3,5) = x_1^C + 2x_2^C = 3 + 2 \cdot 5 = 3 + 10 = 13,$$
$$z^D = z(0,5) = x_1^D + 2x_2^D = 0 + 2 \cdot 5 = 0 + 10 = 10.$$

6-й этап. Выбор в качестве решения задачи линейного программирования той вершины области допустимых решений, в которой целевая функция принимает экстремальное значение:

$$z_{max} = max\{z^A, z^B, z^C, z^D\} = max\{4, 10, 13, 10\} = 13.$$

Следовательно, максимальное значение целевой функции в данной задаче линейного программирования равно 13. Оно достигается в точке *C* (3,5).

Номер варианта ответа: 1.

2.3.2. Задание № 26 по теме “Линейное программирование: аналитическое задание области допустимых решений”

Максимальное значение целевой функции $z = x_1 + 2x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 \le 4, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

равно …

Варианты ответов:

1) 6; 2) 8; 3) 12; 4) 13.

Требуется выбрать один вариант ответа.

Краткие теоретические сведения по теме

Рассмотрены в п. 2.3.1.

Решение

1-й этап. Построение в декартовой системе координат на плоскости граничных прямых, уравнения которых получаются в результате замены в ограничениях знаков неравенств на знаки точных равенств.

Данные уравнения имеют вид

$$x_1 + x_2 = 6,\ x_1 = 4,\ x_1 = 0,\ x_2 = 0 \text{ или}$$
$$x_2 = -x_1 + 6,\ x_1 = 4,\ x_1 = 0,\ x_2 = 0.$$

Координаты двух точек для построения прямой $x_2 = -x_1 + 6$ представлены в таблице.

x_1	x_2
0	6
6	0

Графики граничных прямых показаны на рис 5.

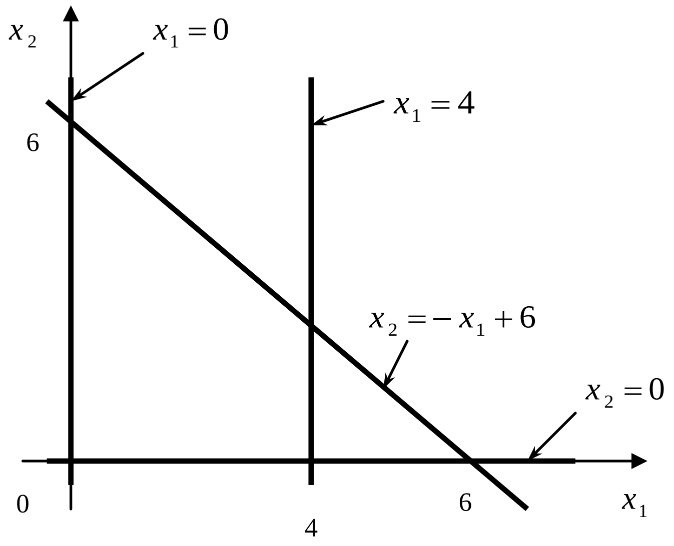


Рис. 5. **Граничные прямые в задании № 26**

2-й этап. Нахождение полуплоскостей, определяемых каждым из ограничений.

Очевидно, что:

1) полуплоскость, определяемая неравенством $x_1 \geq 0$, расположена справа от оси ординат;

2) полуплоскость, определяемая неравенством $x_1 \leq 4$, расположена слева от прямой $x_1 = 4$;

3) полуплоскость, определяемая неравенством $x_2 \geq 0$, расположена выше оси абсцисс.

В общем случае, чтобы определить, какую именно из полуплоскостей определяет неравенство, достаточно подставить в него координаты любой точки, не лежащей на граничной прямой. Если неравенство выполняется, то искомая полуплоскость та, в которой лежит взятая точка, а если не выполняется, то противоположная ей.

Для определения полуплоскости, определяемой неравенством $x_1 + x_2 \leq 6$ возьмем точку O (0,0), которая не располагается на граничной прямой $x_1 + x_2 = 6$ ($x_2 = -x_1 + 6$). Подставив ее координаты в неравенство $x_1 + x_2 \leq 6$ получим истинное неравенство $0 \leq 6$. Следовательно, искомая полуплоскость та, в которой расположена точка O (0,0). Данная полуплоскость расположена ниже граничной прямой $x_1 + x_2 = 6$. На рис. 6 полуплоскости, определяемые неравенствами системы ограничений, показаны штриховкой. Для удобства точки пересечения граничных прямых обозначены буквами.

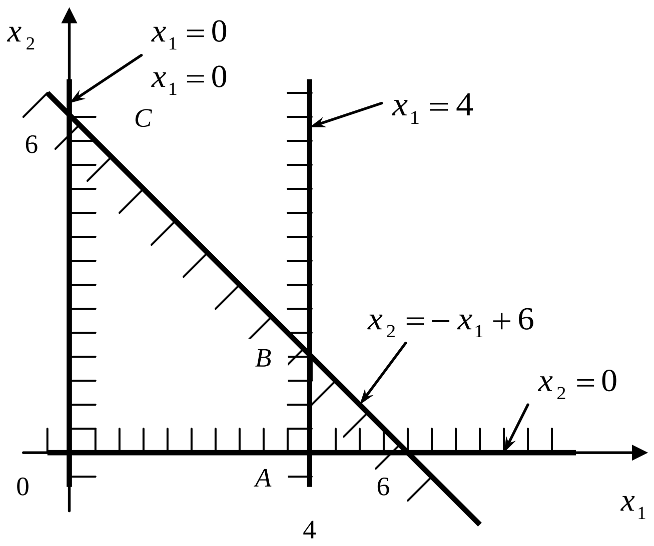


Рис. 6. **Полуплоскости в задании № 26**

3-й этап. Определение области допустимых решений. Анализ рис. 6 показывает, что область допустимых решений представляет собой четырехугольник *OABC*, показанный на рис. 7.

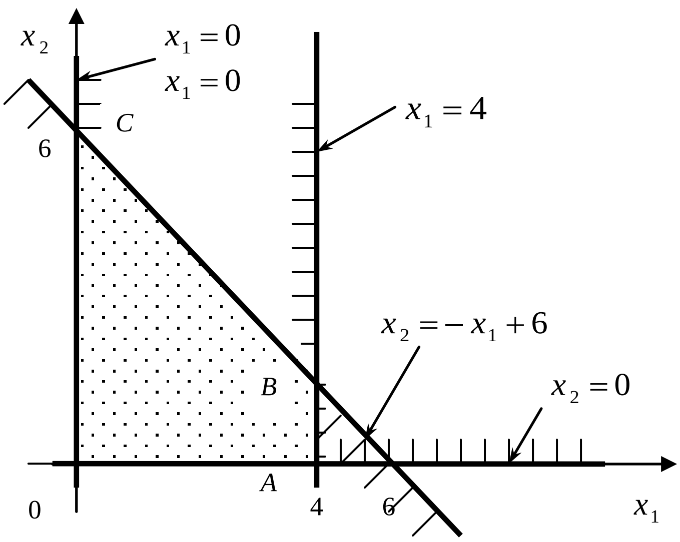


Рис. 7. **Область допустимых решений в задании № 26**

4-й этап. Вычисление координат всех вершин области допустимых решений.

Координаты точек *O* (0,0), *A* (4,0) и *C* (0,6) известны в результате построения граничных прямых.

Для нахождения координат точки *B* необходимо решить систему из двух уравнений граничных прямых, на пересечении которых находится эта точка, вида

$$\begin{cases} x_2 = -x_1 + 6, \\ x_1 = 4. \end{cases}$$

Подставляя значение x_1 из второго уравнения системы в первое, получим

$$x_2 = -4 + 6 = 2.$$

Тогда решение системы уравнений будет иметь вид

$$\begin{cases} x_1 = 4, \\ x_2 = 2. \end{cases}$$

Следовательно, точка *B* имеет координаты (4,2).

5-й этап. Вычисление значений целевой функции во всех вершинах области допустимых решений:

$$z^O = z(0,0) = x_1^O + 2x_2^O = 0 + 2 \cdot 0 = 0 + 0 = 0,$$

$$z^A = z(4,0) = x_1^A + 2x_2^A = 4 + 2 \cdot 0 = 4 + 0 = 4,$$

$$z^B = z(4,2) = x_1^B + 2x_2^B = 4 + 2 \cdot 2 = 4 + 4 = 8,$$

$$z^C = z(0,6) = x_1^C + 2x_2^C = 0 + 2 \cdot 6 = 0 + 12 = 12.$$

6-й этап. Выбор в качестве решения задачи линейного программирования той вершины области допустимых решений, в которой целевая функция принимает экстремальное значение:

$$z_{max} = max\{z^O, z^A, z^B, z^C\} = max\{0, 4, 8, 12\} = 12.$$

Следовательно, максимальное значение целевой функции в данной задаче линейного программирования равно 12. Оно достигается в точке *C* (0,6).

Номер варианта ответа: 3.

2.3.3. Задание № 27 по теме “Нелинейное программирование”

Минимум функции $z = x^2 + y^2$ при условии $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ равен …

Варианты ответов:

1) $\frac{36}{13}$; 2) 0; 3) $\frac{13}{36}$; 4) $\frac{6}{13}$.

Требуется выбрать один вариант ответа.

Краткие теоретические сведения по теме

Нелинейное программирование – раздел математического программирования, изучающий задачи отыскания глобального экстремума фиксированной (целевой) функции при наличии ограничений в ситуации, когда целевая функция и ограничения имеют общий характер (не предполагаются линейными).

Локальным максимумом (минимумом) функции нескольких переменных $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определенной на множестве M n-мерного пространства, называется такое значение $f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ этой функции, что для любых значений $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из M, *близких* к $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ из M, справедливо неравенство

$$f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) \geq f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \; [\, f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) \leq f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,].$$

Глобальным максимумом (минимумом) функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на множестве M n-мерного пространства называется такое значение $f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ этой функции, что *для любых значений* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из M справедливо неравенство

$$f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) \geq f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \; [\, f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) \leq f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,].$$

В общем виде **задача нелинейного программирования** формулируется следующим образом: найти такие значения $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ неизвестных переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, доставляющие экстремум целевой функции вида

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \to extr$$

и удовлетворяющие системе ограничений

$$\begin{cases} g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_i, & i = 1, \dots, k, \\ g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \ge b_i, & i = k+1, \dots, l, \\ g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \le b_i, & i = l+1, \dots, m, \end{cases}$$

где x_j, $j = 1, \dots, n$, - переменные;

f, g_i $(i = 1, \dots, m)$ – заданные функции n переменных;

b_i, $i = 1, \dots, m$, - заданные числа.

Система ограничений может включать также условия неотрицательности переменных, если такие условия имеются.

В математическом анализе задача такого типа называется **задачей на условный экстремум функции**.

Условный экстремум функции – экстремум функции, аргументы которой удовлетворяют дополнительным условиям, называемым **ограничениями** или **уравнениями связи**.

Задачи нелинейного программирования возникают на практике, например, 1) когда затраты изменяются не пропорционально количеству закупленных или произведенных товаров, 2) когда расход определенных видов сырья и ресурсов происходит не линейно, а скачкообразно (в зависимости от объема производства).

В отличие от задач линейного программирования, в которых оптимальное решение может находиться только в вершинах области допустимых решений, *в задачах нелинейного программирования оптимальное решение может находиться внутри области допустимых решений, на ее ребре или в вершине*. Вследствие этого задачи нелинейного программирования сложнее задач линейного программирования и для них *не существует общего универсального метода решения* (аналогичного симплексному методу).

Для решения разных задач нелинейного программирования, отличающихся видом целевой функции и системы ограничений, разработаны специальные методы решения. К основным из них относятся:

1) **метод множителей Лагранжа**, применяемый в случаях, когда

а) условие неотрицательности переменных отсутствует;

б) система ограничений состоит только из равенств;

в) целевая функция и ограничения представляют собой функции, непрерывные вместе со своими частными производными;

2) **выпуклое программирование** – раздел нелинейного программирования, изучающий задачи минимизации выпуклых функций (максимизации вогнутых функций) на выпуклых замкнутых множествах (**выпуклым множеством точек** называется множество точек, которое вместе с любыми своими двумя точками содержит и соединяющий их отрезок; **замкнутым множеством** – называется множество точек, содержащее все свои граничные точки);

3) **квадратичное программирование** – раздел нелинейного программирования, изучающий задачи, в которых требуется найти глобальный экстремум квадратичной функции на многогранном множестве (**выпуклым многогранником** называется выпуклое замкнутое ограниченное множество точек, имеющее конечное число угловых

вершин; множество точек называется **ограниченным**, если существует шар с радиусом конечной длины с центром в любой точке множества, который полностью содержит данное множество);

4) **сепарабельное программирование** – раздел математического программирования, изучающий задачи нелинейного программирования, в которых целевая функция и ограничения задаются **сепарабельными функциями**, то есть функциями, представимыми в виде сумм функций, каждая из которых зависит только от одной действительной переменной.

Кроме того, любая задача нелинейного программирования может быть решена с использованием **градиентных методов оптимизации** – методов максимизации или минимизации гладких функций многих переменных, связанных с использованием градиента (под **гладкой функцией** понимается функция, дифференцируемая в области определения, то есть имеющая непрерывную производную).

Задача нелинейного программирования с двумя переменными может быть решена также графическим методом.

Простейшим видом задач нелинейного программирования являются задачи с двумя переменными и одним ограничением в виде равенства. Они имеют вид

$$\begin{cases} z = f(x, y) \to extr, \\ g(x, y) = b. \end{cases}$$

Точкой условного максимума (минимума) функции $z = f(x, y)$ называется точка (x_0, y_0), если существует такая ее окрестность, что для всех точек (x, y) из этой окрестности, удовлетворяющих условию $g(x, y) = b$, выполняется неравенство

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y) \quad [\, f(x_0, y_0) \leq f(x, y)].$$

Задачи нелинейного программирования с двумя переменными и одним ограничением в виде равенства могут быть решены методом подстановки, методом множителей Лагранжа и графическим методом.

Метод подстановки используется, если из ограничения $g(x, y) = b$ можно в явном виде выразить функцию $y = h(x)$. Тогда, подстановка функции $y = h(x)$ в целевую функцию $z = f(x, y)$ вместо переменой y приводит к получению целевой функции вида $z = f[x, h(x)]$, которая зависит только от одной переменной x. В этом случае задача на условный экстремум функции двух переменных сводится к задаче на безусловный экстремум функции одной переменной.

К основным понятиям, используемым при решении задачи на безусловный экстремум функции одной переменной относятся: точка максимума, точка минимума, точки экстремума, максимум функции, минимум функции, экстремум функции, необходимое условие экстремума функции, критическая точка, достаточное условие экстремума функции.

Точка x_0 называется **точкой максимума** функции $f(x)$, если в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$.

Точка x_0 называется **точкой минимума** функции $f(x)$, если в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) \geq f(x_0)$.

Точки экстремума – общее название точек максимума и минимума функции.

Максимум функции – значение функции в точке ее максимума.

Минимум функции – значение функции в точке ее минимума.

Экстремум функции – общее название максимума и минимума функции.

Необходимое условие экстремума функции одной переменной – равенство нулю ее первой производной ($f'(x)=0$).

Критическая точка – точка, в которой выполнено необходимое условие экстремума функции.

Достаточное условие экстремума функции одной переменной: если первая производная $f'(x)$ дважды дифференцируемой функции $y=f(x)$ равна нулю в некоторой точке x_0, а вторая производная в этой точке $f''(x_0)$ положительна, то точка x_0 является точкой минимума функции $y=f(x)$; если $f''(x_0)$ отрицательна, то точка x_0 является точкой максимума функции $y=f(x)$; если $f''(x_0)=0$, то вопрос о наличии экстремума в точке x_0 остается открытым.

Алгоритм решения задачи на безусловный экстремум функции одной переменной включает следующие этапы.

1. Нахождение производной $f'(x)$ функции $y=f(x)$.
2. Нахождение критических точек функции $y=f(x)$ путем приравнивания ее производной к нулю ($f'(x)=0$) в соответствии с необходимым условием экстремума функции.
3. Нахождение второй производной $f''(x)$ функции $y=f(x)$ и проверка достаточного условия экстремума функции в каждой критической точке.
4. Вычисление локальных экстремумов функции.
5. Нахождение глобальных максимума и минимума функции (при наличии нескольких максимумов или минимумов). Глобальный максимум функции определяется как наибольший локальный максимум. Глобальный минимум функции определяется как наименьший локальный минимум.

Алгоритм решения задачи на безусловный экстремум функции двух переменных $z=f(x,y)$ включает следующие этапы.

1. Нахождение частных производных функции $z=f(x,y)$ и приравнивание их к нулю в соответствии с необходимым условием безусловного экстремума функции. В результате получится система из двух уравнений вида

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=0, \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=0. \end{cases}$$

Частной производной первого порядка (**первой частной производной** или просто **частной производной**) функции двух переменных $z=f(x,y)$ по переменной x называется производная данной функции, вычисленная при фиксированном значении переменной y как обыкновенная производная функции одной переменной x. Она обозначается как $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, z'_x, f'_x.

Частной производной первого порядка функции двух переменных $z=f(x,y)$ по переменной y называется производная данной функции, вычисленная при фиксированном значении переменной x как обыкновенная производная функции одной переменной y. Она обозначается как $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, z'_y, f'_y.

Функция, имеющая частные производные первого порядка, называется **дифференцируемой**.

Теорема (необходимое условие экстремума функции двух переменных): если в точке максимума или минимума все частные производные существуют и непрерывны, то они равны нулю в этой точке.

2. Нахождение критических точек, в которых целевая функция задачи $z = f(x, y)$ может иметь экстремум путем решения полученной системы уравнений.

Критическими (или **стационарными**) **точками** называются точки, в которых выполнено необходимое условие экстремума функции (равенство нулю всех частных производных).

3. Нахождение частных производных второго порядка функции $z = f(x, y)$, вычисление их значений в каждой критической точке и проверка достаточного условия безусловного экстремума функции двух переменных в каждой критической точке.

Частной производной второго порядка (второй частной производной) функции $z = f(x, y)$ называется частная производная первого порядка от частной производной первого порядка данной функции. Функция двух переменных вида $z = f(x, y)$ имеет четыре частных производных второго порядка:

$$z''_{xx} = f''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),\ z''_{yy} = f''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

$$z''_{xy} = f''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),\ z''_{yx} = f''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Частные производные второго порядка, в которых дифференцирование производится по разным переменным, называются **смешанными производными**.

Частные производные более высоких порядков определяются аналогичным образом.

Теорема. Если функция $z = f(x, y)$ дважды дифференцируема в точке $M(x_0, y_0)$, то ее смешанные производные в этой точке равны, то есть

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}.$$

Поэтому величина смешанной производной функции двух переменных не зависит от порядка переменных, по которым берутся производные.

Теорема (достаточное условие экстремума функции двух переменных). Если функция $z = f(x, y)$: а) определена в некоторой окрестности критической точки (x_0, y_0), в которой обе частные производные равны нулю ($f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$); б) имеет в этой точке непрерывные частные производные второго порядка, равные

$$f''_{xx}(x_0, y_0) = A,\ f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0) = B,\ f''_{yy}(x_0, y_0) = C,$$

то характер этой точки определяется значением величины $\Delta = AC - B^2$.

Если $\Delta > 0$, то в точке (x_0, y_0) функция $z = f(x, y)$ имеет экстремум (максимум при $A < 0$ и минимум при $A > 0$).

Если $\Delta < 0$, то в точке (x_0, y_0) функция $z = f(x, y)$ не имеет экстремума.

Если $\Delta = 0$, то вопрос о наличии экстремума в точке (x_0, y_0) функции $z = f(x, y)$ остается открытым.

Данная теорема применима для проверки достаточного условия экстремума функции только двух переменных.

В общем случае для проверки достаточного условия экстремума функции нескольких переменных используется следующая теорема.

Теорема (достаточное условие экстремума функции n переменных). Если точка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является критической точкой функции n переменных $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, и в окрестности этой точки существуют и непрерывны частные производные второго порядка, тогда

1) если матрица Гессе положительно определена в точке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то данная точка является точкой минимума функции z;

2) если матрица Гессе отрицательно определена в точке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то данная точка является точкой максимума функции z;

3) если матрица Гессе не является знакоопределенной в точке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то функция z в данной точке не имеет экстремума.

Матрицей Гессе называется матрица, элементами которой являются частные производные второго порядка функции $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ по всем переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$, вида

$$H = \begin{pmatrix} z''_{x_1 x_1} & z''_{x_1 x_2} & \ldots & z''_{x_1 x_n} \\ z''_{x_2 x_1} & z''_{x_2 x_2} & \ldots & z''_{x_2 x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z''_{x_n x_1} & z''_{x_n x_2} & \ldots & z''_{x_n x_n} \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы Гессе называется **гессианом**.

Для проверки знакоопределенности матрицы Гессе необходимо знакомство с рядом понятий линейной алгебры.

Квадратичной формой $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от n переменных называется сумма, каждый член которой является либо квадратом одной из переменных, либо произведением двух разных переменных, взятых с некоторым коэффициентом:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

где a_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$ – коэффициенты квадратичной формы, являющиеся действительными числами, причем $a_{ij} = a_{ji}$.

Матрицей квадратичной формы называется симметрическая матрица, составленная из коэффициентов квадратичной формы, то есть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Симметрическая (симметричная) матрица – квадратная матрица, в которой элементы, расположенные симметрично относительно главной диагонали равны, то есть $a_{ij} = a_{ji}$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$. Матрица Гессе является симметрической матрицей, так как $z''_{x_i x_j} = z''_{x_j x_i}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$.

Квадратичная форма $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется **положительно (отрицательно) определенной**, если при всех значениях переменных, из которых хотя бы одно отлично от нуля, она принимает строго положительные (соответственно строго отрицательные) значения, то есть

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0 \ (L(x_1, x_2, \ldots, x_n) < 0).$$

Квадратичная форма называется **знакоопределенной**, если она является либо положительно определенной, либо отрицательно определенной.

Квадратичная форма называется **знакопеременной**, если среди ее значений имеются как строго положительные, так и строго отрицательные числа.

Теорема (критерий Сильвестра). Для того чтобы квадратичная форма была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы этой формы были положительны, то есть $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, … , $\Delta_n > 0$, где

$$\Delta_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Главными минорами матрицы квадратичной формы называются определители этой матрицы вида

$$\Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots,\ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Для отрицательно определенных квадратичных форм знаки главных миноров чередуются, начиная со знака “минус” для главного минора первого порядка, то есть главные миноры нечетного порядка отрицательны, а четного порядка положительны.

Если квадратичная форма является знакоопределенной, то все главные миноры ее матрицы отличны от нуля.

4. Вычисление локальных экстремумов функции и выбор того из них, в котором целевая функция задачи принимает максимальное (минимальное) значение.

Метод множителей Лагранжа используется, если из ограничения $g(x, y) = b$ невозможно в явном виде выразить функцию $y = h(x)$ (то есть невозможно использовать метод подстановки). Метод множителей Лагранжа, также как и метод подстановки, позволяет перейти от задачи на нахождение условного экстремума функции к задаче на нахождение безусловного экстремума функции.

Алгоритм решения задачи на условный экстремум целевой функции двух переменных с одним ограничением методом множителей Лагранжа включает следующие этапы.

1. Введение вспомогательной переменной λ, называемой **множителем Лагранжа**, и составление **функции Лагранжа**, которая представляет собой сумму целевой функции и ограничения, умноженного на множитель Лагранжа, вида

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot [g(x, y) - b].$$

Метод множителей Лагранжа основан на том, что точка условного экстремума (x_0, y_0) функции $z = f(x, y)$ при условии $g(x, y) = b$ совпадает с точкой безусловного экстремума (x_0, y_0, λ_0) функции Лагранжа.

2. Нахождение частных производных функции Лагранжа по переменным x, y и λ и приравнивание их к нулю в соответствии с необходимым условием безусловного экстремума функции. В результате получится система из трех уравнений вида

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial x}=0, \\ \dfrac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial y}=0, \\ \dfrac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial \lambda}=0 \end{cases} \text{или} \begin{cases} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}+\lambda\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x}=0, \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}+\lambda\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y}=0, \\ g(x,y)-b=0. \end{cases}$$

3. Нахождение критических (стационарных) точек, в которых функция Лагранжа (и соответственно целевая функция исходной задачи $z=f(x,y)$) может иметь экстремум путем решения полученной системы уравнений.

4. Проверка достаточного условия экстремума функции Лагранжа с использованием достаточного условия экстремума функции двух переменных (так как функция Лагранжа $L(x,y,\lambda)$ при конкретном значении множителя Лагранжа λ_0 становится функцией двух переменных) или достаточного условия экстремума функции n переменных при $n=2$ (путем установления знакоопределенности матрицы Гессе, составленной из частных производных второго порядка функции Лагранжа по переменным x и y, на основе критерия Сильвестра).

5. Вычисление локальных экстремумов функции $z=f(x,y)$ и выбор того из них, в котором целевая функция задачи принимает максимальное (минимальное) значение.

В общем случае при решении задач нелинейного программирования вида

$$\begin{cases} z=f(x_1,\ x_2,\dots,x_n)\to extr, \\ g_i(x_1,\ x_2,\dots x_n)=b_i, \quad i=1,\dots,m, \end{cases}$$

функция Лагранжа определяется выражением

$$L(x_1,\ x_2,\dots,x_n;\lambda_1,\ \lambda_2,\dots,\lambda_m)=f(x_1,\ x_2,\dots,x_n)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\cdot[g_i(x_1,\ x_2,\dots,x_n)-b_i].$$

Система из $(n+m)$ уравнений для нахождения критических точек имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j}=\dfrac{\partial f}{\partial x_j}+\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i\dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}=0, \quad j=1,\dots,n, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i}=g_i(x_1,\ x_2,\dots,x_n)-b_i=0, \quad i=1,\dots,m. \end{cases}$$

Для проверки достаточного условия экстремума функции Лагранжа составляется матрица Гессе порядка n из частных производных второго порядка по переменным $x_1,\ x_2,\dots x_n$.

Множители Лагранжа, соответствующие экстремальному значению целевой функции, характеризуют **чувствительность экстремального значения целевой функции** $z^*=f(x_1^*,x_2^*,\dots,x_n^*)$ **к изменениям констант ограничений** b_i ($i=1,\dots,m$). Они равны

$$\lambda_i = \frac{\partial f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)}{\partial b_i}, \quad i = 1, \dots, m,$$

и показывают, как изменится экстремальное значение целевой функции $z^* = f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ при изменении значения константы b_i в i-м ограничении на единицу.

Например, если какой-то множитель Лагранжа равен нулю, то малые изменения соответствующей константы ограничений не окажут никакого влияния на экстремальное значение целевой функции.

В экономических задачах распределения ресурсов целевая функция имеет размерность стоимости, то есть цены, умноженной на объем продукции (например, прибыль, выручка, издержки), а с помощью ограничений устанавливается определенное значение некоторого количества (например, затрат). В таких задачах с помощью множителя Лагранжа определяется чувствительность целевой функции, имеющей размерность стоимости, к изменениям некоторого количества. Поэтому множитель Лагранжа имеет размерность цены и характеризует ценность какого-либо i-о ресурса. Поэтому множитель Лагранжа также называется **теневой ценой** (данного вида затрат).

Подробнее с рассмотренными понятиями и методами математического анализа и линейной алгебры можно ознакомиться, например, в [17, 18].

Решение

1-й способ (методом подстановки).

В данной задаче ограничение $g(x, y) = b$ имеет вид $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$, то есть $g(x, y) = \frac{x}{2} + \frac{y}{3}$, $b = 1$.

Это ограничение позволяет в явном виде найти функцию $y = h(x)$, то есть выразить y через x:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1 \;\Rightarrow\; \frac{3x + 2y}{6} = 1 \;\Rightarrow\; 3x + 2y = 6 \;\Rightarrow\; y = \frac{-3x + 6}{2}.$$

Следовательно, $h(x) = \frac{-3x + 6}{2}$.

Подставляя функцию $y = h(x)$ в целевую функцию $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ вместо переменой y, получим

$$z = f[x, h(x)] = x^2 + \left(\frac{-3x + 6}{2} \right)^2 = x^2 + \frac{1}{4}(6 - 3x)^2 = x^2 + \frac{1}{4}(36 - 36x + 9x^2) =$$

$$= x^2 + 9 - 9x + \frac{9}{4}x^2 = \frac{13}{4}x^2 - 9x + 9.$$

Полученная целевая функция зависит только от одной переменной x. Следовательно, нужно найти безусловный экстремум функции одной переменной.

В соответствии с алгоритмом решения задачи на безусловный экстремум функции одной переменной имеем.

1. $f'(x) = \left(\frac{13}{4}x^2 - 9x + 9 \right)' = \frac{26}{4}x - 9 = \frac{13}{2}x - 9.$

2. $f^{'}(x)=\dfrac{13}{2}x-9=0 \Rightarrow x_0=\dfrac{2}{13}\cdot 9=\dfrac{18}{13}, \quad y_0=\dfrac{-3x+6}{2}=\dfrac{-3\cdot\dfrac{18}{13}+6}{2}=\dfrac{12}{13}.$

Получена одна критическая точка $M\left(\dfrac{18}{13},\dfrac{12}{13}\right)$.

Для контроля правильности вычислений подставим ее координаты в ограничение задачи:

$$\frac{\frac{18}{13}}{2}+\frac{\frac{12}{13}}{3}=\frac{9}{13}+\frac{4}{13}=1.$$

Выполнение ограничения свидетельствует о правильности вычислений.

3. $f^{''}(x)=[f^{'}(x)]^{'}=\left(\dfrac{13}{2}x-9\right)^{'}=\dfrac{13}{2}>0$ (следовательно, в критической точке функция $z=x^2+y^2$ имеет минимум).

4. $z_{min}=z\left(\dfrac{18}{13},\dfrac{12}{13}\right)=\left(\dfrac{18}{13}\right)^2+\left(\dfrac{12}{13}\right)^2=\dfrac{18^2+13^2}{13^2}=\dfrac{36}{13}.$

Пятый этап алгоритма не выполняется, так как критическая точка одна.

2-й способ (методом множителей Лагранжа).

В соответствии с алгоритмом решения задачи на условный экстремум целевой функции двух переменных с одним ограничением методом множителей Лагранжа имеем.

1. Функция Лагранжа имеет вид

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\cdot[g(x,y)-b]=x^2+y^2+\lambda\cdot\left[\frac{x}{2}+\frac{y}{3}-1\right].$$

2. Частные производные функции Лагранжа по переменным x, y и λ равны:

$$L_x^{'}=\frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial x}=\left(x^2+y^2+\lambda\cdot\left[\frac{x}{2}+\frac{y}{3}-1\right]\right)_x^{'}=2x+\frac{\lambda}{2};$$

$$L_y^{'}=\frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial y}=\left(x^2+y^2+\lambda\cdot\left[\frac{x}{2}+\frac{y}{3}-1\right]\right)_y^{'}=2y+\frac{\lambda}{3};$$

$$L_\lambda^{'}=\frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial \lambda}=\left(x^2+y^2+\lambda\cdot\left[\frac{x}{2}+\frac{y}{3}-1\right]\right)_\lambda^{'}=\frac{x}{2}+\frac{y}{3}-1.$$

Приравнивание частных производных к нулю в соответствии с необходимым условием безусловного экстремума функции приводит к получению системы из трех уравнений вида

$$\begin{cases} 2x+\dfrac{\lambda}{2}=0, \\ 2y+\dfrac{\lambda}{3}=0, \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}-1=0. \end{cases}$$

3. Решение полученной системы линейных уравнений методом подстановки имеет вид:

$$\begin{cases} 2x+\dfrac{\lambda}{2}=0, \\ 2y+\dfrac{\lambda}{3}=0, \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}-1=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x+\lambda=0, \\ 6y+\lambda=0, \\ 3x+2y=6. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{\lambda}{4}, \\ y=-\dfrac{\lambda}{6}, \\ 3x+2y=6. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{\lambda}{4}, \\ y=-\dfrac{\lambda}{6}, \\ -\dfrac{3\lambda}{4}-\dfrac{2\lambda}{6}=6. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{\lambda}{4}, \\ y=-\dfrac{\lambda}{6}, \\ -9\lambda-4\lambda=72. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{\lambda}{4}, \\ y=-\dfrac{\lambda}{6}, \\ -13\lambda=72. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{\lambda}{4}, \\ y=-\dfrac{\lambda}{6}, \\ \lambda=-\dfrac{72}{13}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{18}{13}, \\ y=\dfrac{12}{13}, \\ \lambda=-\dfrac{72}{13}. \end{cases}$$

Получена одна критическая точка $M\left(\dfrac{18}{13},\dfrac{12}{13},-\dfrac{72}{13}\right)$.

4. Проверка достаточного условия экстремума функции Лагранжа.

В данной задаче функция Лагранжа в критической точке при $\lambda_0=-\dfrac{72}{13}$ является функцией двух переменных x и y вида

$$L(x,y,\lambda_0)=x^2+y^2-\frac{72}{13}\cdot\left[\frac{x}{2}+\frac{y}{3}-1\right]$$

А. Проверка достаточного условия экстремума функции Лагранжа с использованием достаточного условия экстремума функции двух переменных.

Частные производные второго порядка функции $L(x,y,\lambda_0)$ в критической точке равны:

$$A=L''_{xx}(x_0,y_0,\lambda_0)=[L'_x(x_0,y_0,\lambda_0)]'_x=\left(2x+\frac{\lambda_0}{2}\right)'_x=2;$$

$$B=L''_{xy}(x_0,y_0,\lambda_0)=[L'_x(x_0,y_0,\lambda_0)]'_y=\left(2x+\frac{\lambda_0}{2}\right)'_y=0;$$

$$C=L''_{yy}(x_0,y_0,\lambda_0)=[L'_y(x_0,y_0,\lambda_0)]'_y=\left(2y+\frac{\lambda_0}{3}\right)'_y=2.$$

При вычислении этих частных производных второго порядка числовое значение λ_0 не использовалось, так как оно входит в свободный член частных производных первого порядка и поэтому не влияет на выражения для частных производных второго порядка по переменным x и y.

Значение величины Δ равно

$$\Delta=AC-B^2=2\cdot 2-0^2=4.$$

Так как $\Delta=4>0$, $A=2>0$ то в критической точке функция $z=x^2+y^2$ имеет минимум.

Б. Проверка достаточного условия экстремума функции Лагранжа с использованием достаточного условия экстремума функции n переменных при $n=2$ (путем *установления знакоопределенности матрицы Гессе, составленной из частных производных функции Лагранжа по переменным x и y, на основе критерия Сильвестра).*

В общем случае матрица Гессе, составленная для частных производных второго порядка функции Лагранжа $L(x, y, \lambda_0)$ в критической точке по переменным x и y, имеет вид

$$H = \begin{pmatrix} L''_{xx}(x_0, y_0, \lambda_0) & L''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) \\ L''_{yx}(x_0, y_0, \lambda_0) & L''_{yy}(x_0, y_0, \lambda_0) \end{pmatrix}.$$

Подставляя в эту матрицу значения частных производных второго порядка, вычисленные при проверке достаточного условия экстремума функции Лагранжа с использованием достаточного условия экстремума функции двух переменных, получим матрицу Гессе для данной задачи:

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Главные миноры этой матрицы равны

$$\Delta_1 = a_{11} = 2, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 0 \cdot 0 = 4.$$

Так как $\Delta_1 > 0$ и $\Delta_2 > 0$, то в соответствии с критерием Сильвестра матрица Гессе данной задачи в критической точке является положительно определенной.

В соответствии с достаточным условием экстремума функции n переменных при положительно определенной матрице Гессе целевая функция имеет в критической точке локальный минимум.

5. Вычисление локальных экстремумов функции $z = f(x, y)$ и выбор того из них, в котором целевая функция задачи принимает максимальное (минимальное) значение.

Так как критическая точка одна, то она является точкой глобального минимума функции. Минимум функции равен

$$z_{min} = z\left(\frac{18}{13}, \frac{12}{13}\right) = \left(\frac{18}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = \frac{18^2 + 13^2}{13^2} = \frac{36}{13}.$$

Номер варианта ответа: 1.

2.3.4. Задание № 28 по теме “Транспортная задача”

Транспортная задача

	50	60 + b	200
100 + a	7	2	4
200	3	5	6

будет закрытой, если …

Варианты ответов:

1) a = 40, b = 20; 2) a = 40, b = 30; 3) a = 40, b = 10; 4) a = 40, b = 40.

Требуется выбрать один вариант ответа.

Краткие теоретические сведения по теме

Словесная формулировка транспортной задачи заключается в следующем.

Некоторый однородный продукт производится в m пунктах производства $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Задан объем производства a_i каждого пункта A_i ($i = 1, 2, \ldots, m$).

Произведенный продукт должен быть перевезен в n пунктов потребления $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Известен спрос b_j пункта B_j ($j = 1, 2, \ldots, n$). Заданы также транспортные издержки c_{ij}, связанные с перевозкой единицы продукта из пункта A_i в пункт B_j.

Требуется составить план перевозок, обеспечивающий при минимальных транспортных расходах (издержках) удовлетворение спроса всех пунктов потребления за счет продукта, произведенного во всех пунктах производства.

Обозначим через x_{ij} количество единиц груза, запланированных к перевозке от i-о поставщика к j-у потребителю. Тогда условие задачи можно представить в виде табл. 5.

Таблица 5

Табличное задание условий транспортной задачи

Поставщики	Запасы (мощности) поставщиков	Потребители				
		B_1	…	B_j	…	B_n
		Спрос (мощность) потребителей				
		b_1	…	b_j	…	b_n
A_1	a_1	x_{11} $\boxed{c_{11}}$	…	x_{1j} $\boxed{c_{1j}}$	…	x_{1n} $\boxed{c_{1n}}$
…	…	…	…	…	…	…
A_i	a_i	x_{i1} $\boxed{c_{i1}}$	…	x_{ij} $\boxed{c_{ij}}$	…	x_{in} $\boxed{c_{in}}$
…	…	…	…	…	…	…
A_m	a_m	x_{m1} $\boxed{c_{m1}}$	…	x_{mj} $\boxed{c_{mj}}$	…	x_{mn} $\boxed{c_{mn}}$

Транспортная задача называется **закрытой**, если $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, то есть если суммарная мощность поставщиков равна суммарной мощности потребителей (другими словами, если существует баланс между запасами и потребностями). В противном случае транспортная задача называется **открытой**.

Решение

В рассматриваемом задании транспортная задача будет закрытой, если будет выполняться равенство $100 + a + 200 = 50 + 60 + b + 200$. Отсюда $a - b = 10$.

Значение $a - b$ в вариантах ответов равно: 1) 20; 2) 10; 3) 30; 4) 0.

Номер варианта ответа: 2.

2.4. Типовые задания по экономико-математическим моделям

Экономико-математические модели – математические описания экономических процессов, явлений или объектов, включающие:

1) теоретические **микроэкономические модели** – модели, описывающие взаимодействие структурных и функциональных составляющих экономики или их поведение в отдельности в рыночной среде (модели поведения потребителей и производителей в условиях совершенной и несовершенной конкуренции);

2) теоретические **макроэкономические модели** – модели, которые описывают экономику как единое целое со связями между агрегированными материальными и финансовыми показателями (валовой внутренний продукт, потребление, инвестиции, занятость, денежная масса, государственный долг, инфляция) (модели общего экономического равновесия и модели развития экономики).

Студенты специальности "Национальная экономика" в рамках дисциплины "Математика" знакомятся с простейшими микроэкономическими моделями.

Для самостоятельного изучения экономико-математических моделей студентами экономических специальностей можно рекомендовать учебники (учебные пособия) [15, 19, 20] и экономико-математический энциклопедический словарь [21].

2.4.1. Задание № 29 по теме "Функции полезности"

Функция полезности потребителя имеет вид $u = \sqrt{xy}$. Цена на благо x равна 5, на благо y равна 10, доход потребителя равен 200. Тогда оптимальный набор благ потребителя имеет вид …

Варианты ответов:

1) $x = 20,\ y = 20$; 2) $x = 40,\ y = 0$; 3) $x = 20,\ y = 10$; 4) $x = 8,\ y = 16$.

Требуется выбрать один вариант ответа.

Краткие теоретические сведения по теме

Одним из основных элементов экономической теории является домашнее хозяйство (**потребитель**), определяемое как группа индивидуумов, распределяющая свой доход на покупку и потребление товаров и услуг. Основная проблема при изучении поведения потребителя заключается в том, чтобы установить, в каких объемах он приобретает наличные товары и услуги при заданных ценах и доходе. К основным понятиям, используемым при построении математических моделей поведения потребителей, относятся: пространство товаров, бюджетное множество, предпочтения потребителя, функция полезности потребителя.

Поведение потребителя, рассматриваемое с точки зрения рационального ведения хозяйства, математически выражается в выборе некоторой точки из "пространства товаров". Под **товаром** понимается некоторое благо или услуга, поступившее в продажу в определенное время в определенном месте.

Пусть n - конечное число рассматриваемых товаров;

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)^T$$ - вектор-столбец объемов товаров, приобретенных потребителем за определенный период (например, за год) при заданных ценах на товары $P = (p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_n)$ и его доходе Q за этот же период.

Пространством товаров **называется множество всех возможных наборов товаров, то есть** $C = \{X : X \geq 0\}$ **(**$C = \{X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T : x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n\}$**).**

Возможные наборы товаров в таком истолковании представляют собой векторы пространства товаров. Пространство товаров является неотрицательной частью n-мерного евклидова пространства.

Скалярное произведение набора товаров X и вектора их цен P представляет собой число, называемое **стоимостью набора товаров** X и обозначаемое как $C(X)$:

$$C(X) = PX = (p_1, p_2, \dots, p_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + \dots + p_n \cdot x_n .$$

Бюджетным множеством $B(P, Q)$ называется множество наборов товаров стоимости не более дохода Q потребителя при данных ценах P на товары.

Границей бюджетного множества $G(P, Q)$ называется множество наборов товаров стоимости ровно Q.

Бюджетное множество и его граница задаются с помощью обычных равенств и неравенств в виде

$$B(P, Q) = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \geq 0,\ p_1 \cdot x_1 + \dots + p_n \cdot x_n \leq Q\},$$
$$G(P, Q) = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \geq 0,\ p_1 \cdot x_1 + \dots + p_n \cdot x_n = Q\},$$

а с помощью векторных равенств и неравенств в виде

$$B(P, Q) = \{X : X \geq 0, PX \leq Q\},\ G(P, Q) = \{X : X \geq 0, PX = Q\}.$$

Бюджетное множество и его граница представляют собой выпуклые, ограниченные и замкнутые множества точек.

Выбор потребителем некоторого набора товаров во многом зависит от его вкусов и желаний. При этом потребитель различает наборы товаров, предпочитая один набор товаров другому. Эти предпочтения математически формализуются в виде отношений предпочтения.

Для каждой пары наборов товаров X и Y может иметь место одно из следующих отношений предпочтения:

1) **отношение слабого предпочтения**, обозначаемое как $X \succeq Y$ и означающее, что потребитель предпочитает набор товаров X набору товаров Y или не делает между ними различий;

2) **отношение равноценности (безразличия)**, обозначаемое как $X \sim Y$, имеющее место, если $X \succeq Y$ и $Y \succeq X$, и означающее, что для потребителя оба набора обладают одинаковой степенью предпочтения;

3) **отношение строгого предпочтения**, обозначаемое как $X \succ Y$, имеющее место, если верно, что $X \succcurlyeq Y$, и если неверно, что $X \sim Y$, и означающее, что для потребителя набор X предпочтительнее набора Y.

Отношение предпочтения называется:

1) **рефлексивным**, если $X \succcurlyeq X$ для любого X (рефлексивность означает, что любой набор товаров равноценен сам себе);

2) **симметричным**, если из того, что $X \succcurlyeq Y$, следует, что и $Y \succcurlyeq X$;

3) **транзитивным**, если из того, что $Y \succcurlyeq X$ и $Z \succcurlyeq Y$, следует, что $Z \succcurlyeq X$ (транзитивность означает, что если потребитель предпочитает набор Z набору Y, а набор Y набору X, то он должен предпочитать набор Z набору X; транзитивность также подразумевает, что если покупатель не делает различий между наборами Z и Y и между наборами Y и X, то он не должен делать различий между наборами Z и X; она также означает и то, что два набора всегда можно косвенно сопоставить с любым третьим набором товаров);

4) **совершенным (полным)**, если для любых двух наборов X и Y либо $X \succcurlyeq Y$, либо $Y \succcurlyeq X$ (совершенность означает, что потребитель в состоянии сравнить по привлекательности любые два набора товаров).

Система предпочтений потребителя показывает, какой из двух наборов товаров предпочтительнее для него. Однако во многих случаях удобнее оценивать привлекательность набора товаров количественно, то есть приписывать каждому набору X из пространства товаров C какое-либо число $u(X)$. В этом случае получается функция $u: C \to R$, отображающая пространство товаров в множество действительных чисел. Главное требование к такой функции состоит в том, что она должна отражать предпочтения на пространстве товаров C.

Функцией полезности потребителя называется функция $u(X)$, отображающая пространство товаров в множество действительных чисел и удовлетворяющая следующим условиям:

1) $u(X) \le u(Y)$, если и только если $X \preccurlyeq Y$;

2) $u(X) = u(Y)$, если и только если $X \sim Y$;

3) $u(X) < u(Y)$, если и только если $X \prec Y$.

Введение функции полезности позволяет заменить отношения предпочтения привычными отношениями между числами: больше, меньше, равно.

Вообще под **полезностью** понимается показатель степени удовлетворения, вызванного потреблением какого-либо набора товаров и услуг или каким-либо отдельным товаром.

Условия существования функции полезности определяются следующей **теоремой Дебрё**: если система предпочтений непрерывна, то непрерывная функция полезности существует.

Функция полезности, если она существует, не определяется единственным образом. Например, если $u(X)$ - функция полезности, то функция $v(X) = k\,u(X) + b$ (где $k > 0$, а b - константа) также будет функцией полезности. В общем случае, если $f(u)$ - произвольная строго возрастающая функция на множестве действительных чисел R, то функция $f(u[X])$ также будет функцией полезности.

Каждый потребитель имеет в общем случае свою функцию полезности.

Кривой (линией) безразличия называется линия уровня функции полезности, соединяющая потребительские наборы $(x_1, x_2)^T$ с одинаковой полезностью, то есть

$$u(X) = u(x_1, x_2) = C = const.$$

Кривые безразличия, соответствующие разным уровням удовлетворения потребностей, не касаются и не пересекаются.

Картой кривых безразличия называется множество кривых безразличия. Карта кривых безразличия отражает процесс возрастания полезности наборов благ. При переходе от одной кривой безразличия к другой, более удаленной от начала координат полезность наборов возрастает.

Если число товаров $n = 3$, то говорят о **поверхностях безразличия**, а при $n > 3$ - о гиперповерхностях безразличия.

Гиперповерхностью безразличия называется гиперповерхность размера $(n-1)$, на которой полезность постоянна, то есть $u(X) = C = const$.

В теории поведения потребителей предполагается, что **функция полезности обладает следующими свойствами**:

1) полезность набора товаров X возрастает с ростом потребления i-о блага (при неизменных объемах потребления других благ), то есть

$$\frac{\partial u(X)}{\partial x_i} > 0$$

(первые частные производные функции полезности в точке X называются **предельными полезностями i-о товара** в точке X; предельная полезность показывает, на сколько возрастает полезность при возрастании потребления товара на одну единицу; предельная полезность каждого товара положительна: с точки зрения экономики это означает, что если потребитель уже имеет набор товаров X, то он все равно еще желает приобрести i-й товар);

2) небольшой прирост блага при его первоначальном отсутствии резко увеличивает полезность, то есть

$$\lim_{x_i \to 0} \frac{\partial u(X)}{\partial x_i} = \infty;$$

3) с ростом потребления блага скорость роста полезности (предельная полезность продукта) уменьшается, то есть

$$\frac{\partial^2 u(X)}{\partial x_i^2} < 0$$

(это свойство называется **законом убывания предельной полезности** или **первым законом Госсена**);

4) при очень большом объеме блага его дальнейшее увеличение не приводит к увеличению полезности, то есть

$$\lim_{x_i \to \infty} \frac{\partial u(X)}{\partial x_i} = 0;$$

5) предельная полезность каждого блага увеличивается с ростов количества другого блага, то есть

$$\frac{\partial^2 u(X)}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 u(X)}{\partial x_2 \partial x_1} > 0 \text{ (для набора из двух благ).}$$

Примерами функций полезности, удовлетворяющих перечисленным требованиям, являются:

1) **неоклассическая функция полезности** $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$, где $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta < 1$;

2) **квадратическая функция полезности**

$$u(X) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j ,$$

где матрица (b_{ij}) отрицательно определена и $a_j + \sum_{i=1}^{n} b_{ij} x_i > 0$ для $j = 1, \dots, n$;

3) **логарифмическая функция полезности** $u(X) = \sum_{i=1}^{n} a_i \, log(x_i - b_i)$, где $a_i > 0$, $x_i > b_i \geq 0$ для $i = 1, \dots, n$ (основание логарифма должно быть больше 1);

4) **функция полезности Стоуна** (неоклассическая) $u(X) = \prod_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^{\alpha_i}$, где a_i - минимально необходимое количество i-о блага, которое приобретается в любом случае и не является предметом выбора (набор благ $(a_1, a_2, \dots, a_n)^T$ можно рассматривать как минимальную потребительскую корзину; для того чтобы набор благ $(a_1, a_2, \dots, a_n)^T$ мог быть полностью приобретен, необходимо, чтобы доход Q был больше количества денег, необходимых для покупки этого набора, то есть $\sum_{i=1}^{n} p_i a_i \leq Q$); $\alpha_i > 0$ - коэффициент, характеризующий относительную ценность i-о блага для потребителя.

В теории потребления предполагается, что потребитель всегда стремится максимизировать полезность приобретаемого набора товаров $u(X)$ и единственное, что его ограничивает, - это ограниченность дохода.

Поэтому **задача потребительского выбора (задача рационального поведения потребителя на рынке)** заключается в выборе такого потребительского набора $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T$, который максимизирует его функцию полезности $u(X)$ при заданном бюджетном ограничении $B(P, Q)$, то есть

$$\begin{cases} u(X) \to max, \\ X \in B(P, Q), \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} u(X) \to max, \\ PX \leq Q, \\ X \geq 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} u(X) \to max, \\ \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq Q, \\ x_i \geq 0, \ i = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Задача потребительского выбора является задачей нелинейного программирования. Решение задачи потребительского выбора двух товаров графическим методом представлено на рис. 8.

Как видно из рис. 8, максимум функции полезности достигается в точке касания верхней кривой безразличия границы бюджетного множества. Такой точкой является точка $A(x_1^*, x_2^*)$. Точка A является точкой равновесия, в которой у потребителя нет каких-либо мотивов для пересмотра данного плана покупок.

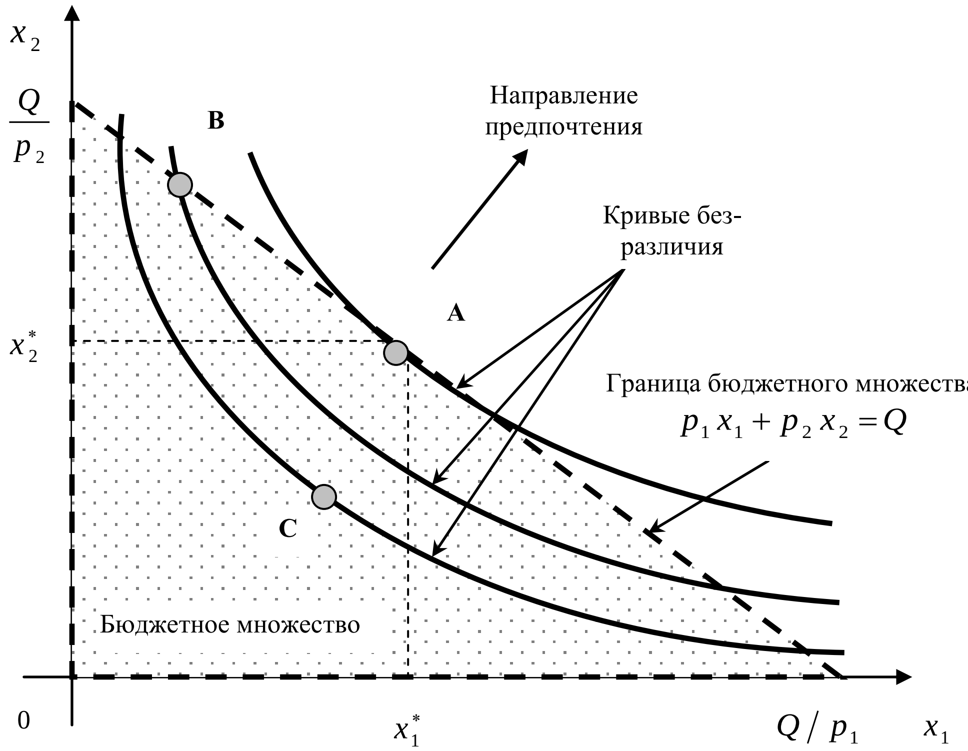


Рис. 8. **Решение задачи потребительского выбора двух товаров графическим методом**

Всякая другая точка, лежащая на границе бюджетного множества, например B, или ниже границы бюджетного множества, например C, будет находиться на более низкой кривой безразличия, с более низким уровнем полезности и не устроит покупателя.

Таким образом, максимум функции полезности потребителя при наличии бюджетного ограничения находится на границе бюджетного множества. Поэтому ограничение $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \le Q$ можно представить в виде $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = Q$. Кроме того, в экстремальной точке $A(x_1^*, x_2^*)$ условия $x_i \ge 0,\ i = 1, \ldots, n$, выполняются автоматически на основании свойств функции полезности (кривые безразличия располагаются в первом квадранте и неограниченно приближаются к осям координат, но не пересекают их).

С учетом сделанных замечаний задачу потребительского выбора можно представить в виде

$$\begin{cases} u(X) \to max, \\ \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = Q. \end{cases}$$

Данная задача представляет собой задачу на условный максимум функции нескольких переменных при одном ограничении-равенстве и решается методом множителей Лагранжа.

Система уравнений для нахождения решения задачи потребительского выбора $X^*=(x^*_1,x^*_2,\dots,x^*_n)^T$ в общем виде представляет собой следующую систему из $(n+1)$-о уравнения:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u(X)}{\partial x_i}+\lambda p_i=0,\ i=1,\dots,n,\\ \sum\limits_{i=1}^{n} p_i x_i-Q=0,\end{cases}$$

где λ - множитель Лагранжа.

В задаче потребительского выбора вид бюджетного множества и вид функции полезности определяют единственное решение. Поэтому необходимость в проверке достаточного условия экстремума функции отпадает.

Решение задачи потребительского выбора $X^*=(x^*_1,x^*_2,\dots,x^*_n)^T$ называется **оптимальным** для потребителя или **точкой спроса (локальным рыночным равновесием)** потребителя. Точка спроса зависит от конкретных значений цен товаров P и дохода потребителя Q и характеризует спрос потребителя на рассматриваемые товары (блага).

Зависимость точки спроса от цен товаров и дохода потребителя вида $X^*=D^*(P,Q)$ называется **функцией спроса Маршалла**. Функция спроса Маршалла представляет собой вектор-функцию $(n+1)$-о аргумента (n цен $p_1,p_2,\dots,p_n$ и дохода Q), состоящую из n компонентов, то есть функция спроса Маршалла – это набор n функций вида

$$x_1^*=d_1^*(p_1,p_2,\dots,p_n,Q),$$
$$x_2^*=d_2^*(p_1,p_2,\dots,p_n,Q),$$
$$\dots$$
$$x_n^*=d_n^*(p_1,p_2,\dots,p_n,Q).$$

Каждая из этих функций называется **функцией спроса** соответствующего **товара**.

Важное свойство функций спроса Маршалла заключается в том, что пропорциональное изменение цен и дохода не изменяет спроса, то есть для любого положительного числа k имеет место равенство

$$D^*(kP,kQ)=D^*(P,Q).$$

Анализ системы уравнений для нахождения решения задачи потребительского выбора позволяет сформулировать **три основных вывода теории предельной полезности**:

1) в точке оптимального выбора потребителя цены пропорциональны предельным полезностям благ, то есть

$$\frac{\partial u(X^*)}{\partial x_i}=\lambda p_i,\ i=1,\dots,n,$$

(или отношение предельных полезностей благ равно отношению цен, то есть

$$\frac{\partial u(X^*)}{\partial x_j}\Bigg/\frac{\partial u(X^*)}{\partial x_i}=\frac{p_j}{p_i},\ i,\,j=1,\dots,n\ );$$

2) предельная полезность, приходящаяся на одну денежную единицу должна быть одинаковой для всех покупаемых товаров, то есть

$$\frac{\partial u(X^*)}{\partial x_j} \Big/ p_j = \frac{\partial u(X^*)}{\partial x_i} \Big/ p_i = \lambda, \; i, j = 1, \dots, n \; ;$$

3) равные предельные полезности, приходящиеся на одну расходуемую денежную единицу, равны множителю Лагранжа, который поэтому называется **предельной полезностью денег** (предельная полезность денежной единицы для потребителей с разным уровнем дохода различна: λ уменьшается с ростом Q и возрастает с его уменьшением; это следует из выражения

$$\lambda = \frac{\partial u(X^*)}{\partial x_i} \Big/ p_i + \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i - Q}{p_i},$$

полученного из разрешения системы уравнений для нахождения решения задачи потребительского выбора относительно λ).

Модель поведения потребителя Стоуна, представляющая собой задачу потребительского выбора с функцией полезности Стоуна, имеет вид

$$\begin{cases} u(X) = \prod_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^{\alpha_i} \to max, \\ \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = Q. \end{cases}$$

Функция спроса Стоуна имеет вид

$$x_i^* = a_i + \frac{\alpha_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \cdot \frac{Q - \sum_{i=1}^{n} p_i a_i}{p_i}, \; i = 1, \dots, n.$$

Она истолковывается следующим образом по последовательности действий.

1. Вначале приобретается минимально необходимый набор благ $(a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n)^T$.

2. Затем рассчитывается оставшаяся после этого сумма денег, равная $Q - \sum_{i=1}^{n} p_i a_i$.

3. Эта сумма денег распределяется для приобретения дополнительного количества благ пропорционально ценности каждого блага для потребителя $(\alpha_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i , i = 1, \dots, n)$.

4. Потом выделенная для приобретения каждого дополнительного количества блага сумма $\frac{\alpha_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \cdot \left[Q - \sum_{i=1}^{n} p_i a_i \right], \; i = 1, \dots, n$, делится на его цену p_i для вычисления этого дополнительного количества:

$$\frac{\alpha_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \cdot \frac{Q - \sum_{i=1}^{n} p_i a_i}{p_i}, \; i = 1, \dots, n \; .$$

5. Наконец, вычисляется оптимальное количество каждого приобретаемого i-о блага путем сложения минимально необходимого количества блага a_i с дополнительным количеством этого блага.

Решение

В общем случае задача потребительского выбора набора из двух товаров $X=(x,y)^T$ имеет вид

$$\begin{cases} u(X)=u(x,y)\to max, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = Q. \end{cases}$$

В данной задаче $u(x,y)=\sqrt{x\ \ y}$, $p_1=5$, $p_2=10$, $Q=200$. Тогда данная конкретная задача потребительского выбора имеет вид

$$\begin{cases} u(x,y)=\sqrt{xy}\to max, \\ 5x_1+10x_2=200. \end{cases}$$

Ее решение возможно двумя способами:

1) путем непосредственного решения задачи методом множителей Лагранжа;

2) путем решения системы уравнений для нахождения решения задачи потребительского выбора для заданных функции полезности, цен благ и дохода потребителя.

1-й способ (непосредственное решение задачи методом множителей Лагранжа).

В соответствии с алгоритмом решения задачи на условный экстремум целевой функции двух переменных с одним ограничением методом множителей Лагранжа имеем.

6. Функция Лагранжа имеет вид

$$L(x,y,\lambda)=u(x,y)+\lambda\cdot[g(x,y)-Q]=\sqrt{xy}+\lambda\cdot[5x+10y-200].$$

7. Частные производные функции Лагранжа по переменным x, y и λ равны:

$$L'_x=\frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial x}=\left(\sqrt{xy}+\lambda\cdot[5x+10y-200]\right)'_x=\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}+5\lambda;$$

$$L'_y=\frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial y}=\left(\sqrt{xy}+\lambda\cdot[5x+10y-200]\right)'_y=\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}+10\lambda;$$

$$L'_\lambda=\frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial \lambda}=\left(\sqrt{xy}+\lambda\cdot[5x+10y-200]\right)'_\lambda=5x+10y-200.$$

Приравнивание частных производных к нулю в соответствии с необходимым условием безусловного экстремума функции приводит к получению системы из трех уравнений вида

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}+5\lambda=0, \\ \dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}+10\lambda=0, \\ 5x+10y-200=0. \end{cases}$$

8. Решение полученной системы линейных уравнений методом подстановки имеет вид.

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} + 5\lambda = 0, \\ \dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}} + 10\lambda = 0, \\ 5x + 10y - 200 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} = -5\lambda, \\ \dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}} = -10\lambda, \\ 5x + 10y - 200 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = -10\lambda, \\ \dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}} = -10\lambda, \\ 5x + 10y - 200 = 0. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} - \dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}} = -10\lambda + 10\lambda = 0, \\ 5x + 10y - 200 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2y - x}{\sqrt{xy}} = 0, \\ 5x + 10y - 200 = 0. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2y - x = 0, \ x \neq 0, y \neq 0, \\ 5x + 10y - 200 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y, \\ 5x + 10y - 200 = 0. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2y, \\ 10y + 10y - 200 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y, \\ y = 10. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 20, \\ y = 10. \end{cases}$$

Получена одна критическая точка $M(20{,}10)$ функции полезности. Нахождение численного значения множителя Лагранжа λ в данной задаче не обязательно.

9. Проверка достаточного условия экстремума функции Лагранжа не производится, так как в задаче потребительского выбора вид бюджетного множества и вид функции полезности определяют единственное решение.

10. Вычисление максимума функции полезности:

$u_{max} = u(20,10) = \sqrt{20 \cdot 10} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2} \approx 14.$

2-й способ (решение системы уравнений для нахождения решения задачи потребительского выбора для заданных функции полезности, цен благ и дохода потребителя).

В общем случае система уравнений для нахождения решения задачи потребительского выбора набора из двух товаров $X = (x, y)^T$ представляет собой следующую систему из 3 уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(X)}{\partial x_i} + \lambda p_i = 0, \ i = 1, 2, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} p_i x_i - Q = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \lambda p_1 = 0, \\ \dfrac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \lambda p_2 = 0, \\ p_1 x + p_2 y - Q = 0. \end{cases}$$

Подставляя в эту систему функцию полезности, цены благ и доход потребителя для данной задачи, получим

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(\sqrt{x\ \ y})}{\partial x} + 5\lambda = 0, \\ \dfrac{\partial(\sqrt{x\ \ y})}{\partial y} + 10\lambda = 0, \\ 5x + 10y - 200 = 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} + 5\lambda = 0, \\ \dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}} + 10\lambda = 0, \\ 5x + 10y - 200 = 0. \end{cases}$$

Данная система уравнений аналогична системе, полученной в п. 2 решения 1-м способом. Поэтому дальнейшее решение аналогично решению 1-м способом.

Номер варианта ответа: 3.

2.4.2. Задание № 30 по теме “Кривые безразличия”

Дана функция полезности $u = x + 4\sqrt{y}$. Тогда кривая безразличия задается уравнением …

Варианты ответов:

1) $4x\sqrt{y} = C$; 2) $\dfrac{x}{4\sqrt{y}} = C$; 3) $1 + \dfrac{2}{\sqrt{y}} = C$; 4) $x + 4\sqrt{y} = C$.

Требуется выбрать один вариант ответа.

Краткие теоретические сведения по теме

Рассмотрены в п. 2.4.1.

Решение

В общем случае кривой безразличия называется линия уровня функции полезности, соединяющая потребительские наборы $(x_1, x_2)^T$ с одинаковой полезностью, то есть

$$u(X) = u(x_1, x_2) = C = const.$$

В данной задаче $u(x, y) = x + 4\sqrt{y}$.

Следовательно, кривая безразличия задается уравнением $x + 4\sqrt{y} = C$.

Номер варианта ответа: 4.

2.4.3. Задание № 31 по теме “Функции выпуска продукции”

Зависимость между издержками производства C и объемом продукции Q выражается функцией $C = 30\,Q - 0,09\,Q^3$. Тогда предельные издержки $\dfrac{dC}{dQ}$ при объеме производства $Q = 10$ равны …

Варианты ответов:

1) 27,3; 2) 210; 3) 3; 4) 21.

Требуется выбрать один вариант ответа.

Краткие теоретические сведения по теме

Производственными функциями (в широком смысле) называются соотношения между используемыми в производстве материальными благами и трудовыми ресурсами (называемыми в совокупности **производственными ресурсами**) и выпускаемой продукцией. В общем случае производственная функция имеет вид

$$F(X, Y, A) = 0,$$

где F - обозначение производственной функции;

$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ - вектор объемов производственных ресурсов, используемых в течение некоторой единицы времени;

$Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ - вектор объемов выпуска продукции;

$A = (a_1, a_2, \dots, a_p)$ - вектор параметров производственной функции.

Данное выражение также называется **уравнением производственной поверхности**. Описание связи между использованием ресурсов и выпуском продукции в таком виде подразумевает, что не учитываются эффекты, связанные с продолжительностью производственного цикла, то есть с периодом между затратами ресурсов и выпуском продукции.

Вместо общего представления производственной функции в виде $F(X, Y, A) = 0$ часто применяются следующие ее разновидности:

1) **функции выпуска** продукции, в которых в качестве независимых переменных рассматриваются затраты ресурсов, а зависимыми переменными являются объемы выпуска продукции, то есть

$$Y = f(X, A);$$

2) **функции производственных затрат**, в которых в качестве независимых переменных рассматриваются объемы выпуска продукции, а зависимыми переменными являются затраты ресурсов, то есть

$$X = h(Y, A).$$

В общем случае в функции выпуска возможны различные сочетания количеств производственных ресурсов, что приводит к тому, что один и тот же объем продукции может быть произведен при разных сочетаниях количеств ресурсов. В функции затрат задание выпуска продукции однозначно определяет затраты ресурсов. Поэтому функции затрат используются в случае, когда в исследуемой экономической системе отсутствует возможность замены одного ресурса другим. Функции выпуска используются тогда, когда такая замена допустима.

В экономической литературе часто под термином “производственная функция” (в узком смысле) подразумевают функцию выпуска.

В теории поведения производителей предполагается, что производственные функции удовлетворяют ряду свойств.

Свойства функции выпуска продукции заключаются в следующем (на примере двухфакторной функции выпуска одного продукта вида $y = f(x_1, x_2)$).

1. Производство невозможно при отсутствии хотя бы одного ресурса, то есть

$$f(0,0) = f(x_1, 0) = f(0, x_2) = 0.$$

2. Сростом затрат хотя бы одного ресурса объем выпуска растет (не уменьшается), то есть

$$f(x_1, x_2) > f(x_1^{'}, x_2^{'})$$

при $x_1 > x_1^{'}$, $x_2 > x_2^{'}$ или $x_1 > x_1^{'}$, $x_2 \ge x_2^{'}$, или $x_1 \ge x_1^{'}$, $x_2 > x_2^{'}$.

Данное предположение, кажущееся на первый взгляд очевидным, выполняется не всегда. Например, при увеличении количества удобрений, приходящихся на единицу площади, производство зерна сначала растет, а затем начинает убывать. Для функций выпуска, не удовлетворяющих рассматриваемому свойству, вводится понятие экономической области.

Экономической областью называется подмножество сочетаний объемов ресурсов, в котором увеличение любого ресурса не приводит к уменьшению выпуска продукции. Использование ресурсов в сочетаниях, не попадающих в экономическую область, бессмысленно с экономической точки зрения.

Для дифференцируемых функций выпуска рассматриваемое свойство записывается в виде

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} > 0,\ i = 1, 2.$$

Для дифференцируемых функций выпуска, имеющих непрерывные производные, границами экономической области являются поверхности $\frac{\partial y}{\partial x_i} = 0$, которые называются **разделяющими поверхностями**.

Первая частная производная функции выпуска $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ называется **предельным продуктом (производительностью, эффективностью)** i-о ресурса. Величина предельного продукта характеризует отношение прироста выпуска продукции к малому приросту количества производственного ресурса. Например, дополнительное внесение в почву единицы удобрения при неизменных количествах других факторов ведет к некоторому приросту урожая, который и выступает в качестве предельного продукта дополнительной единицы удобрения. Величина предельного продукта зависит от координат точки (x_1, x_2), в которой вычисляется производная.

3. С ростом затрат одного i-о ресурса при неизменном количестве другого ресурса величина прироста выпуска на каждую дополнительную единицу i-о ресурса не растет, то есть

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2} \le 0,\ i = 1, 2.$$

Это свойство называется **законом убывающей эффективности** (или **законом убывающей производительности факторов производства**).

4. С ростом затрат одного ресурса предельная эффективность другого ресурса возрастает, то есть

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} \ge 0,\ i = 1, 2.$$

Если выполнены свойства 3 и 4, то график двухфакторной функции выпуска представляет собой кривую, расположенную в неотрицательном квадранте и выпуклую вверх.

5. Функция выпуска является **однородной функцией** степени $p > 0$, то есть

$$f(tx_1, tx_2) = t^p f(x_1, x_2).$$

Показатель однородности p характеризует **отдачу от расширения масштабов производства**, то есть изменение выпуска продукции при пропорциональном изменении затрат ресурсов, которое математически выражается в умножении всех координат вектора затрат $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ на положительный скаляр t.

При $p > 1$ производственная функция характеризуется возрастающей отдачей от расширения масштабов производства. В этом случае с ростом масштаба производства в t раз ($t > 1$), то есть с переходом от вектора затрат X к вектору tX, объем выпуска возрастает в t^p ($> t$) раз. При $p = 1$ производственная функция характеризуется постоянной отдачей от расширения масштабов производства. При $p < 1$ производственная функция характеризуется убывающей отдачей от расширения масштабов производства. В экономической области значение показателя однородности функции должно быть больше или равно нуля ($p \ge 0$).

При рассмотрении свойств функции выпуска вектор ее параметров A в записи функции не использовался, так как считалось, что эти параметры известны.

Неоклассической производственной функцией называется однородная функция выпуска произвольной степени, имеющая положительные первые частные производные, отрицательные вторые частные производные и положительные вторые смешанные производные по всем ресурсам производства.

К **основным характеристикам производственной функции выпуска продукции**, описывающим разные стороны исследуемой экономической системы, относятся.

1. **Предельная производительность** i-о **ресурса** (рассмотрена во втором свойстве функции выпуска), определяемая по формуле

$$M_i = \frac{\partial y}{\partial x_i}, \ i = 1, \dots, n.$$

2. **Средняя производительность** i**-о ресурса (средний выпуск по** i**-у ресурсу)**, представляющая собой отношение производственной функции к i-у ресурсу, то есть

$$A_i = \frac{y}{x_i}, \ i = 1, \dots, n.$$

3. **(Частная) эластичность выпуска по** i**-у ресурсу**, представляющая собой отношение предельной производительности i-о ресурса к его средней производительности, то есть

$$E_i = \frac{M_i}{A_i} = \frac{\partial y}{\partial x_i} \Big/ \frac{y}{x_i} = \frac{\partial y}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{y} = \frac{\partial y}{y} \Big/ \frac{\partial x_i}{x_i}, \ i = 1, \dots, n.$$

Эластичность выпуска по i-у ресурсу показывает, на сколько процентов увеличится выпуск при увеличении затрат i-о ресурса на один процент при неизменном количестве остальных ресурсов.

4. **Эластичность производства**, представляющая собой сумму эластичностей всех ресурсов производства, то есть

$$E_x = \sum_{i=1}^{n} E_i \ .$$

Эластичность производства показывает, на сколько процентов увеличится выпуск при увеличении на один процент затрат каждого ресурса.

5. **Предельная норма замены (замещения)** i**-о ресурса** j**-м**, определяемая по формуле

$$R_{ij} = -\frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \frac{\partial y}{\partial x_i} \bigg/ \frac{\partial y}{\partial x_j} \ \text{при}\ y = const,\ x_k = const,\ k \ne i,\, j\ .$$

Предельная норма замены одного ресурса другим равна отношению их предельных производительностей.

Предельная норма замены i-о ресурса j-м показывает количество j-о ресурса, которое требуется для замены одной единицы i-о ресурса при сохранении на неизменном уровне объема выпуска и количества остальных ресурсов.

6. **Эластичность замены (замещения)** i**-о ресурса** j**-м**, определяемая по формуле

$$\sigma_{ij} = \frac{R_{ij}}{x_j / x_i} \cdot \frac{\partial (x_j / x_i)}{\partial R_{ij}} \ \text{при}\ y = const,\ x_k = const,\ k \ne i,\, j\ .$$

Эластичность замены i-о ресурса j-м показывает на сколько процентов должно измениться отношение ресурсов x_j и x_i, чтобы предельная норма замены изменилась на один процент при сохранении на неизменном уровне объема выпуска и количества остальных ресурсов.

В литературе описано множество конкретных производственных функций выпуска продукции. Чаще всего среди них используются следующие:

1) **линейная производственная функция** вида $y = a_0 + a_1 x_1 + ... + a_n x_n$;

2) **производственная функция Леонтьева (затраты-выпуск)** вида

$$y = min\left(\frac{x_1}{a_1}, ..., \frac{x_n}{a_n} \right);$$

3) **производственная функция Кобба-Дугласа** вида

$$y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2},\ a_0, a_1, a_2 \ge 0\ ,\ a_1 + a_2 \le 1$$

(в приложениях и теоретических исследованиях $x_1 = K$ - объем используемого основного производственного капитала, $x_2 = L$ - затраты труда; с использованием символов K и L рассматриваемая функция примет вид: $y = a_0 K^{a_1} L^{a_2}$);

4) **производственная функция с постоянной эластичностью замещения** вида

$$y = a_0 (a_1 x_1^{-\rho} + ... + a_n x_n^{-\rho})^{-p/\rho}\ ,$$

где $p > 0$ - показатель однородности функции, $\rho \ge -1$ - коэффициент замещения, $a_0 > 0$, $a_1, ..., a_n \ge 0$ (данная функция часто называется **ПЭЗ-функцией** или **CES-функцией** (от англ. constant elasticity of substitution)).

CES-функция является обобщением производственных функций первых трех типов: при $\rho \to -1$ она приближается к линейной производственной функции; при $\rho \to 0$ она приближается к производственной функции Кобба-Дугласа; при $\rho \to \infty$ она приближается к производственной функции Леонтьева.

Функция затрат нескольких ресурсов для выпуска одного продукта имеет вид

$$x_i = h_i\,(y)\,,\ i = 1, \dots, n.$$

К основным **свойствам функций затрат** относятся.

1. Функция затрат является дважды непрерывно дифференцируемой.
2. При отсутствии производства ресурсы не нужны, то есть

$$h_i\,(0) = 0\,,\ i = 1, \dots, n.$$

3. Рост производства требует увеличения количества используемых ресурсов, то есть

$$h_i^{'}\,(y) \geq 0,\ i = 1, \dots, n.$$

Первые производные функции затрат ресурсов, то есть

$$h_i^{'}\,(y) = \frac{\partial x_i}{\partial y}\,,\ i = 1, \dots, n\,,$$

называются **предельными затратами (издержками) i-о ресурса**.

В отличие от функций выпуска, которые, как правило, используются для описания сложных экономических систем типа национального или регионального хозяйства в целом, функции затрат применяются для описания производства в относительно простых экономических системах типа фирмы.

Основными видами функций затрат являются:

1) **линейная однородная функция затрат** вида $x_i = a_i\, y\,,\ i = 1, \dots, n\,,\ a_i \geq 0$;

2) **линейная неоднородная функция затрат с ненулевыми затратами при нулевом выпуске** вида $x_i = d_i + a_i\, y\,,\ i = 1, \dots, n\,,\ a_i \geq 0,\ d_i \geq 0$ (если все d_i равны нулю, то эта функция совпадает с линейной однородной функцией затрат; в противном случае затраты не равны нулю даже тогда, когда продукция не выпускается; эта функция может быть использована в тех случаях, когда приходится заранее делать капиталовложения, объем которых не зависит от масштабов производства);

3) **линейная неоднородная функция затрат с нулевыми затратами при нулевом выпуске** вида

$$x_i = \begin{cases} d_i + a_i\, y & при\ \ y > 0, \\ 0 \quad при\ \ y = 0, & \end{cases} \qquad i = 1, \dots, n$$

(эта функция обладает одним существенным недостатком – она имеет разрыв в точке нуль, что затрудняет исследование моделей, в которых она используется);

4) **степенная функция затрат** вида $x_i = a_i\, y^{\alpha_i}\,,\ i = 1, \dots, n\,,\ a_i \geq 0,\ \alpha_i \geq 0$ (при $\alpha_i < 1$ - это функция с убывающими предельными затратами, при $\alpha_i > 1$ - это функция с возрастающими предельными затратами).

Более подробные сведения о производственных функциях можно получить в [22].

В микроэкономике производственные функции используются при построении математических моделей поведения производителей (фирм). Под **фирмой** понимается организация, производящая затраты экономических ресурсов (факторов), таких как земля, труд и капитал, для изготовления продукции и услуг, которые она продает потребителям или другим фирмам.

Математические модели поведения фирмы различаются в зависимости от типа рыночной структуры: совершенной конкуренции, монополии, несовершенной конкуренции.

Математические модели поведения фирмы в условиях совершенной конкуренции строятся на основе следующих предпосылок:

1) технологические условия производства описываются производственной функцией, которая отражает чисто технологические условия производства, то есть процесс производства как взаимодействие конкретных видов труда и средств производства без учета процесса создания стоимости;

2) никаких внешних ограничений на объем производства и реализации продукции не существует, то же относится и к покупаемым факторам производства;

3) удельный вес фирмы невелик, в силу чего она не может влиять ни на уровень цен реализуемой продукции, ни на цены закупаемых ею факторов;

4) возможен свободный выход фирмы на рынок и уход с рынка;

5) целью деятельности фирмы является получение максимальной прибыли.

При данных предпосылках построение моделей поведения фирмы сводится к формулировке разных задач максимизации прибыли с целью выяснения наиболее общих сторон деятельности фирмы.

Словесная формулировка неоклассической модели поведения фирмы, производящей один продукт, заключается в максимизации прибыли фирмы путем выбора объемов затрат при заданной производственной функции и при заданных цене продукта и ценах затрат.

Пусть $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ - производственная функция выпуска продукции фирмы, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - объемы затрачиваемых фирмой ресурсов (факторов производства), p_0 - цена единицы выпускаемого фирмой продукта, p_1, p_2, … , p_n - рыночные цены затрачиваемых фирмой ресурсов.

В этих обозначениях **доход (выручка)** фирмы в определенном временном периоде (например, в году), представляющий собой произведение общего объема выпускаемого фирмой продукта y на рыночную цену p_0 этого продукта, составит

$$R = p_0 y = p_0\ f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Издержки производства **фирмы, представляющие общие выплаты фирмы в определенном временном периоде за все виды затрат, равны**

$$C = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i .$$

Тогда **прибыль** фирмы в определенном временном периоде, вычисляемая как разность между полученным фирмой доходом и ее издержками производства, определяется выражением

$$\Pi = R - C = p_0\ f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i ,$$

а целевая функция модели поведения фирмы имеет вид

$$\Pi = R - C = p_0\ f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \to max .$$

Ограничения модели поведения фирмы зависят от того, какой конкретно временной период (долговременный или краткосрочный) предшествует периоду, в котором фирма максимизирует свою прибыль.

В случае долговременного периода времени фирма может свободно выбирать любой вектор затрат $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из пространства затрат $\{X = (x_1, x_2, \ldots, x_n): x_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, n\}$.

Поэтому **модель поведения фирмы в долговременном периоде времени** имеет вид

$$\begin{cases} П = p_0\, f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \sum\limits_{i=1}^{n} p_i x_i \to max, \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Данная задача представляет собой задачу на безусловный экстремум целевой функции n переменных. Ее решение в соответствии с необходимым условием экстремума функции находится в результате решения системы из n уравнений вида

$$\frac{\partial П}{\partial x_i} = \frac{\partial \left[p_0\, f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \sum\limits_{i=1}^{n} p_i x_i \right]}{\partial x_i} = 0, \; i = 1, \ldots, n.$$

Отсюда

$$\frac{\partial [p_0\, f(x_1, x_2, \ldots, x_n)]}{\partial x_i} - \frac{\partial \left[\sum\limits_{i=1}^{n} p_i x_i \right]}{\partial x_i} = 0, \; i = 1, \ldots, n;$$

$$p_0 \frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_i} - p_i = 0, \; i = 1, \ldots, n.$$

Окончательное выражение для нахождения решения модели поведения фирмы в долговременном периоде времени имеет вид

$$p_0 \frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_i} = p_i, \; i = 1, \ldots, n.$$

Вектор затрат ресурсов $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$, удовлетворяющий данной системе равенств называется **оптимальным решением фирмы** или **локальным рыночным равновесием фирмы** (в долговременном периоде времени).

Значения $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ являются функциями цен $p_0,\; p_1,\; p_2, \ldots,\; p_n$, то есть

$$\begin{aligned} x_1^* &= d_1(p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n), \\ x_2^* &= d_2(p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n), \\ &\ldots \\ x_n^* &= d_n(p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n). \end{aligned}$$

Данные выражения, представляющие собой зависимости оптимального выбора ресурсов $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ от цены выпускаемого продукта и от цен на ресурсы, называются **функциями спроса на ресурсы (затраты)** со стороны фирмы на рынках ресурсов.

Подставив функции спроса на ресурсы в производственную функцию, получим выражение вида

$$\begin{gathered} y^* = f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) = \\ = f[d_1(p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n), d_2(p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n), \ldots, d_n(p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n)] = \\ = s(p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n). \end{gathered}$$

Данное выражение, представляющее собой зависимость оптимального выпуска продукта от цены выпускаемого продукта и от цен на ресурсы, называется **функцией предложения выпуска** фирмы на рынке.

В случае краткосрочного периода времени фирма должна учитывать неизбежные лимиты на объемы затрачиваемых ею ресурсов. Поэтому **модель поведения фирмы в краткосрочном периоде времени** имеет вид

$$\begin{cases} П = p_0\, f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \sum\limits_{i=1}^{n} p_i x_i \to max, \\ g_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_j, \quad j = 1, 2, \ldots, m, \\ x_i \ge 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \end{cases}$$

где m неравенств вида $g_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_j$ выражают ограничения на затраты для определенного краткосрочного периода.

Данная задача представляет собой задачу нелинейного программирования.

Математические модели поведения фирмы в условиях монополии и несовершенной конкуренции подробно рассмотрены в [19].

Решение

Предельными затратами (издержками) i-о ресурса называются первые производные функции затрат ресурсов, то есть

$$h_i^{'}(y) = \frac{\partial x_i}{\partial y}, \; i = 1, \ldots, n.$$

В случае функции затрат одного ресурса для выпуска одного продукта предельные затраты данного ресурса определяются по формуле $h^{'}(y) = \dfrac{\partial x}{\partial y}$.

В обозначениях условий задачи $h^{'}(y) = \dfrac{\partial C}{\partial Q}$.

При $C = 30\,Q - 0{,}09\,Q^3$ имеем

$$h^{'}(y) = \frac{\partial C}{\partial Q} = \frac{\partial(30\,Q - 0{,}09\,Q^3)}{\partial Q} = 30 - 3 \cdot 0{,}09\,Q^2 = 30 - 0{,}27\,Q^2.$$

Подставляя в данное выражение $Q = 10$, получим

$$h^{'}(y)\Big|_{Q=10} = 30 - 0{,}27 \cdot 10^2 = 30 - 27 = 3.$$

Номер варианта ответа: 3.

2.4.4. Задание № 32 по теме “Функции спроса и предложения: равновесный объем”

Даны функции спроса $q = \dfrac{p+6}{p+1}$ и предложения $s = 2p + 1{,}5$, где p -цена товара.

Тогда равновесный объем “спроса-предложения” ($q = s$) …

Варианты ответов:

1) 3,5; 2) 6; 3) 10,5; 4) 1.

Требуется выбрать один вариант ответа.

Краткие теоретические сведения по теме

Потребители, желающие купить товары или услуги, и производители этих товаров и услуг встречаются на рынке. На рынке потребители реализуют свою функцию спроса на товары и услуги, а производители – свою функцию предложения товаров и услуг.

Основные понятия взаимодействия потребителей и производителей на рынке одного товара и предположения об условиях формирования цены на товар заключаются в следующем.

1. **Рынок** – система экономических отношений между производителями и потребителями, которые складываются в связи с формированием свободных цен, колеблющихся в зависимости от динамики спроса и предложения.

2. **Конкурентный рынок** – рынок, участники которого (производители и потребители) не могут влиять на цены товаров и вынуждены только приспосабливаться к существующей системе цен.

3. **Совершенная конкуренция** – абстрактная модель рыночного механизма как системы обмена, способной эффективно выполнять функцию экономического регулятора. Представляет собой набор условий, которые в совокупности должны обеспечить указанное свойство рынка. К основным условиям, определяющим совершенную конкуренцию на рынке одного товара, относятся:

а) на рынке действует множество продавцов, и ни один из них не может повлиять на цену продукта, изменяя объем предложения, то есть не обладает достаточно большой долей в общем объеме предлагаемого продукта;

б) аналогично, имеется множество покупателей, и ни один из них не может повлиять на цену продукта, изменяя объем своего спроса;

в) нет никаких ограничений (кроме ценовых) для совершения сделок между любым покупателем и любым продавцом;

г) нет никаких факторов, кроме предложения продукта и спроса на него, которые влияли бы на установление рыночной цены;

д) нет ограничений для появления на рынке новых продавцов и покупателей, а также ухода с него уже действующих;

е) участники рынка – продавцы и покупатели – располагают полной информацией, необходимой для выбора партнеров по сделкам и принятия иных решений;

ж) поведение продавцов и покупателей на рынке является рациональным, то есть объяснимым с позиций преследования экономических интересов (каждый продавец стремится максимизировать прибыль от продаж, каждый покупатель – минимизировать издержки на удовлетворение своих потребностей в рамках бюджетных ограничений);

з) затраты на совершение сделок пренебрежимо малы.

4. **Спрос** – это количество товара, которое потребители готовы купить по определенной цене.

Функция спроса – зависимость количества товара $D(p)$, покупаемого на данном рынке за единицу времени при цене p за единицу товара, от цены за единицу товара (по-английски “demand” – спрос). Функция спроса на товар является убывающей функцией цены: при увеличении цены величина спроса на товар стремится к нулю, при уменьшении цены величина спроса увеличивается, то есть

$$\lim_{p \to \infty} D(p) = 0, \ \lim_{p \to 0} D(p) = \infty.$$

5. **Предложение** – это количество товара, которое производители готовы продать по определенной цене.

Функция предложения – зависимость количества товара $S(p)$, поставляемого на данный рынок за единицу времени при цене p за единицу товара, от цены за единицу данного товара (по-английски “supply” – предложение). Функция предложения товара является возрастающей: при увеличении цены величина предложения товара неограниченно увеличивается, при уменьшении цены величина предложения уменьшается, приближаясь к нулю, то есть

$$\lim_{p \to \infty} S(p) = \infty, \ \lim_{p \to 0} S(p) = 0.$$

6. Состояние рынка, при котором спрос равен предложению, то есть

$$D(p) = S(p),$$

называется **равновесным**, а цена, при которой достигается равенство спроса и предложения, называется **равновесной ценой**.

7. Рынок товара всегда находится в состоянии локального равновесия.

8. В предположении, что функции спроса и предложения определены и непрерывны для всех $p > 0$, решение уравнения условия равновесия рынка одного товара будет единственным.

Пусть функции спроса и предложения являются линейными функциями цены вида

$$D(p) = a - bp, a > 0, b > 0;$$

$$S(p) = c + ep, c > 0, e > 0.$$

Кроме того, естественно считать, что $a > c$, так как при нулевой цене спрос превышает предложение.

Подставляя выражения для данных функций спроса и предложения в условие равновесия, получим

$$a - bp = c + ep.$$

Отсюда простейшая **детерминистская статическая модель определения равновесной цены на рынке одного товара при линейных функциях спроса и предложения** имеет вид:

$$p^* = \frac{a - c}{b + e},$$

$$D^* = D(p^*) = a - bp^* = a - b\frac{a - c}{b + e} = \frac{ae + bc}{b + e},$$

$$S^* = S(p^*) = c + ep^* = c + e\frac{a - c}{b + e} = \frac{ae + bc}{b + e},$$

где p^*, D^*, S^* - равновесные цена, спрос и предложение соответственно.

Графическое решение задачи определения равновесной цены в этом случае показано на рис. 9.

Динамические модели установления равновесной цены основаны на предположении, что изменение цены зависит от разности спроса и предложения: если спрос выше предложения, то цена возрастает, в противном случае убывает.

Различают два подхода к построению динамических моделей установления равновесной цены:

1) **непрерывный**, в котором динамика цен описывается дифференциальным уравнением вида

$$\frac{dp}{dt} = f\left[D(p) - S(p)\right];$$

2) **дискретный**, в котором переменные на промежутке времени $\left[t, t+1\right)$ считаются неизменными.

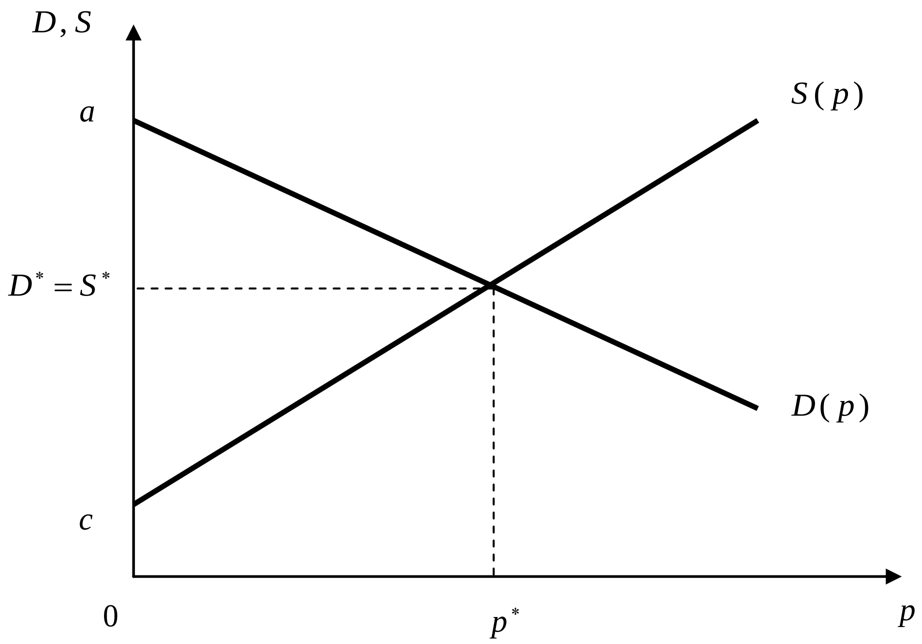


Рис. 9. **Графическое решение задачи определения равновесной цены**

В последнем случае последовательным интервалам времени $[t, t+1)$ соответствуют значения цены $p(t)$, спроса $D(t)$ и предложения $S(t)$.

Дискретные динамические модели установления равновесной цены в зависимости от принятых при их разработке предположений делятся на:

1) **модели с запаздыванием предложения**, в которых условие равновесия имеет вид

$$S(p_{t+1}) = D(p_t);$$

2) **модели с запаздыванием спроса**, в которых условие равновесия имеет вид

$$D(p_{t+1}) = S(p_t).$$

В обоих случаях в системе координат *D(S)Op* итерационный процесс установления равновесной цены изображается ломаной в виде паутины, которая как бы “намотана” на кривые спроса и предложения. Это обстоятельство привело к общему названию дискретных динамических моделей установления равновесной цены **паутинообразными моделями** установления равновесной цены.

В основе детерминистской паутинообразной модели установления равновесной цены на рынке одного товара с запаздыванием спроса лежат следующие предположения:

1) товаропроизводитель, принимая решение об объеме предложения, ориентируется на цену предыдущего периода;

2) рынок всегда находится в состоянии локального равновесия.

Формально эти две гипотезы означают следующее:

1) объем предложения на рынке S_{t+1} в каждый период времени $t+1$ определяется значением цены предыдущего периода при помощи функции предложения $S_{t+1} = S(p_t)$;

2) на рынке в каждый период $t+1$ устанавливается равновесная цена p_{t+1}, которая является решением уравнения $D\left(p_{t+1}\right)=S_{t+1}$;

3) потребитель предъявляет спрос, который при цене p_{t+1} в каждый момент времени равен предложению S_{t+1}, вследствие чего потребитель приобретает все, что ему предложено.

Схематичное графическое истолкование итерационного процесса установления равновесной цены на рынке одного товара на основе паутинообразной модели с запаздыванием спроса представлено на рис. 10.

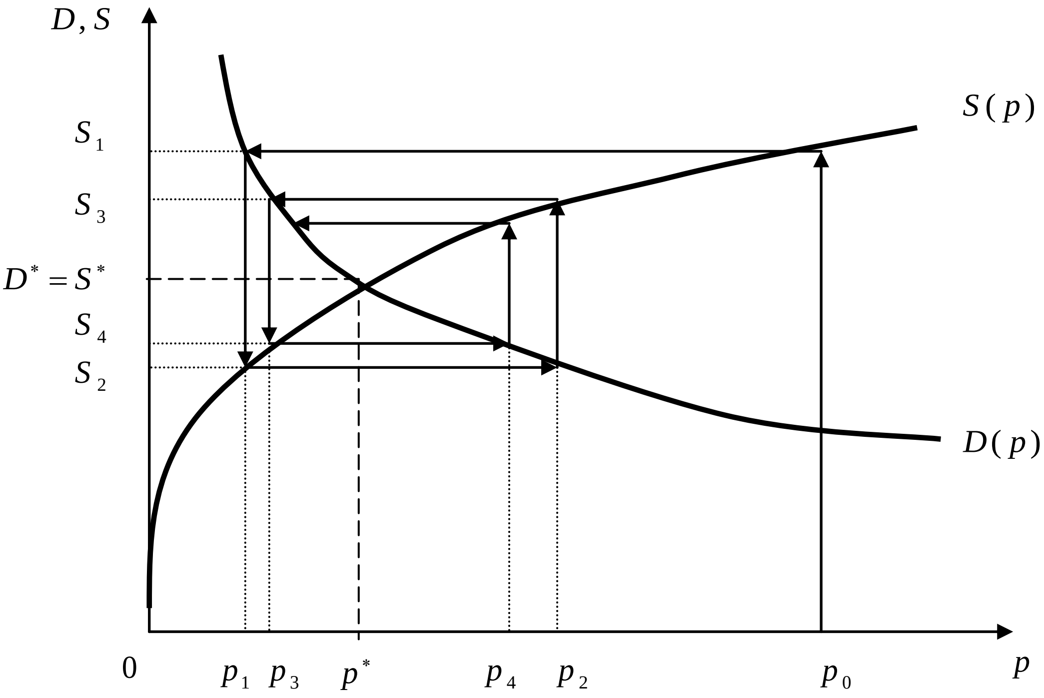


Рис. 10. **Графическое истолкование процесса установления равновесной цены**

Паутинообразная модель позволяет реализовать процесс “нащупывания” равновесной цены, в результате которого формируется последовательность цен p_t, где t - номер интервала времени.

Пусть в начальный момент времени $t=0$ на рынке установилась начальная цена товара p_0. Тогда производитель по значению этой цены в соответствии с функцией предложения определяет объем предложения S_1 для следующего момента времени $t=1$. Так как на рынке предложение превысит спрос ($S_1 > D_1$), то цена товара уменьшится и станет равной p_1.

Для очередного момента времени $t=2$ производитель, ориентируясь на цену предыдущего момента времени p_1, в соответствии с функцией предложения определяет новый объем предложения S_2. Так как на рынке предложение окажется меньше спроса ($S_2 < D_2$), то цена товара уменьшится и станет равной p_2.

Для очередного момента времени $t = 3$ производитель, ориентируясь на цену предыдущего момента времени p_2, в соответствии с функцией предложения определяет новый объем предложения S_3 и т. д.

Как видно из рис. 10 итерационный процесс установления равновесной цены сходится.

В общем случае для нелинейных функций спроса и предложения для сходимости итерационного процесса установления равновесной цены хотя бы в ее окрестности должно быть выполнено условие

$$S'(p^*) < \left| D'(p^*) \right|.$$

Состояние равновесия рынка одного товара называется **устойчивым**, если в некоторой окрестности равновесной цены итерационный процесс сходится к состоянию равновесия при любом начальном значении цены из этой окрестности.

Состояние равновесия называется **неустойчивым**, если существует такая окрестность равновесной цены, что при любом начальном значении цены из этой окрестности, отличном от равновесного, итерационный процесс не сходится к состоянию равновесия.

Найдем зависимость цены товара p_t в последующем периоде времени от его цены p_{t-1} в предыдущем периоде времени для частного случая паутинообразной модели с запаздыванием спроса, в которой функции спроса и предложения линейны и имеют вид:

$$D_t = D(p_t) = a - b\,p_t\ ,$$

$$S_t = S(p_{t-1}) = c + e\,p_{t-1}\ .$$

Равновесная цена товара в t-м периоде времени является решением уравнения

$$D(p_t) = S(p_{t-1})$$

или

$$a - b\,p_t = c + e\,p_{t-1},$$

Отсюда

$$p_t = \frac{a-c}{b} - \frac{e}{b}\,p_{t-1}.$$

Последовательно подставляя в последнее рекуррентное соотношение значения t=1, 2, … получим

$$p_1 = \frac{a-c}{b} - \frac{e}{b}\,p_0;$$

$$p_2 = \frac{a-c}{b} - \frac{e}{b}\,p_1 = \frac{a-c}{b} - \frac{e}{b}\left[\frac{a-c}{b} - \frac{e}{b}\,p_0\right] = \frac{a-c}{b} - \frac{e}{b}\cdot\frac{a-c}{b} + \left[\frac{e}{b}\right]^2 p_0 =$$

$$= \frac{a-c}{b}\cdot\left\{1 - \frac{e}{b}\right\} + \left[\frac{e}{b}\right]^2 p_0;$$

$$p_3 = \frac{a-c}{b} - \frac{e}{b}\,p_2 = \frac{a-c}{b} - \frac{e}{b}\left[\frac{a-c}{b}\cdot\left\{1 - \frac{e}{b}\right\} + \left[\frac{e}{b}\right]^2 p_0\right] =$$

$$=\frac{a-c}{b}-\frac{e}{b}\cdot\frac{a-c}{b}+\left[\frac{e}{b}\right]^2\cdot\frac{a-c}{b}-\left[\frac{e}{b}\right]^3 p_0=\frac{a-c}{b}\cdot\left\{1-\frac{e}{b}+\left(\frac{e}{b}\right)^2\right\}-\left[\frac{e}{b}\right]^3 p_0\,;$$

$$\ldots$$

$$p_t=\frac{a-c}{b}\cdot\left\{1-\frac{e}{b}+\left(\frac{e}{b}\right)^2+\ldots+(-1)^{t-1}\left(\frac{e}{b}\right)^{t-1}\right\}+(-1)^t\left[\frac{e}{b}\right]^t p_0\,. \qquad (*)$$

Выражение в фигурных скобках представляет собой сумму n первых членов геометрической прогрессии с первым членом $a_1=1$ и знаменателем $q=-\frac{e}{b}$, которая при $q\neq 1$ (что всегда выполняется) равна

$$s_n=a_1\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{1-\left(-\frac{e}{b}\right)^t}{1+\frac{e}{b}}\,. \qquad (**)$$

Подставляя $(**)$ в $(*)$, получим

$$p_t=\frac{a-c}{b}\cdot\frac{1-\left(-\frac{e}{b}\right)^t}{1+\frac{e}{b}}+(-1)^t\left[\frac{e}{b}\right]^t p_0\,. \qquad (***)$$

При $e<b$ $\left(-\frac{e}{b}\right)^t\to 0$ и

$$p_t\to\frac{a-c}{b}\cdot\frac{1}{1+\frac{e}{b}}=\frac{a-c}{b}\cdot\frac{1}{\frac{b+e}{b}}=\frac{a-c}{b}\cdot\frac{b}{b+e}=\frac{a-c}{b+e}=p^*\,.$$

При $e>b$ $\left(-\frac{e}{b}\right)^t\to\pm\infty$ и итерационный процесс установления равновесной цены расходится. В этом случае состояние равновесия рынка является неустойчивым.

При $e=b$ (то есть при одинаковых по модулю угловых коэффициентах наклона кривых спроса и предложения) выражение $(***)$ примет вид

$$p_t=\frac{a-c}{2b}\cdot\left[1-(-1)^t\right]+(-1)^t p_0\,.$$

При нечетных значениях t=1, 3, 5, …

$$p_t=2\cdot\frac{a-c}{2b}-p_0=\frac{a-c}{b}-p_0\,.$$

При четных значениях t=2, 4, 6, …

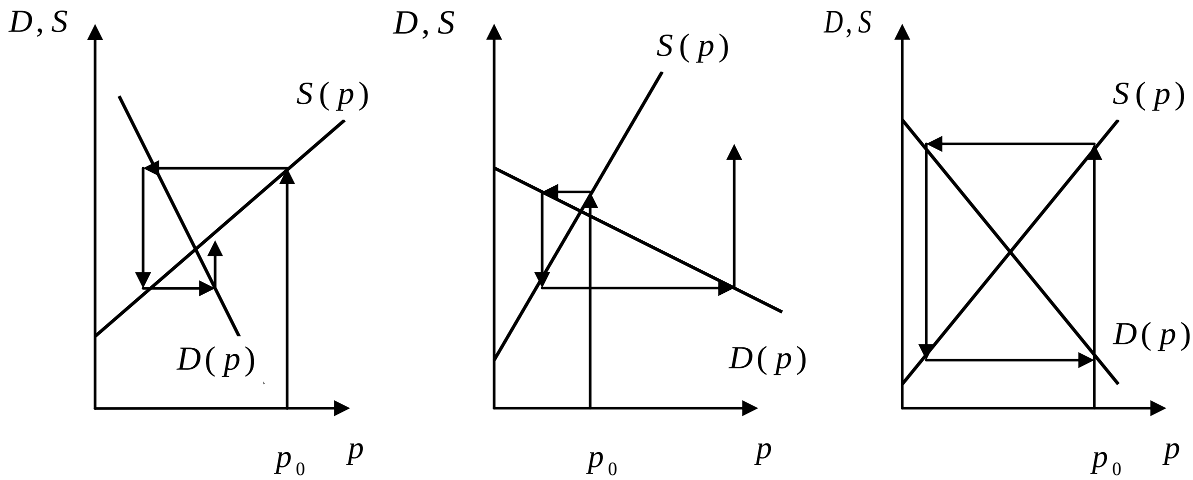
$$p_t=p_0\,.$$

Тогда

$$\Delta p=\frac{a-c}{b}-p_0-p_0=\frac{a-c}{b}-2p_0$$

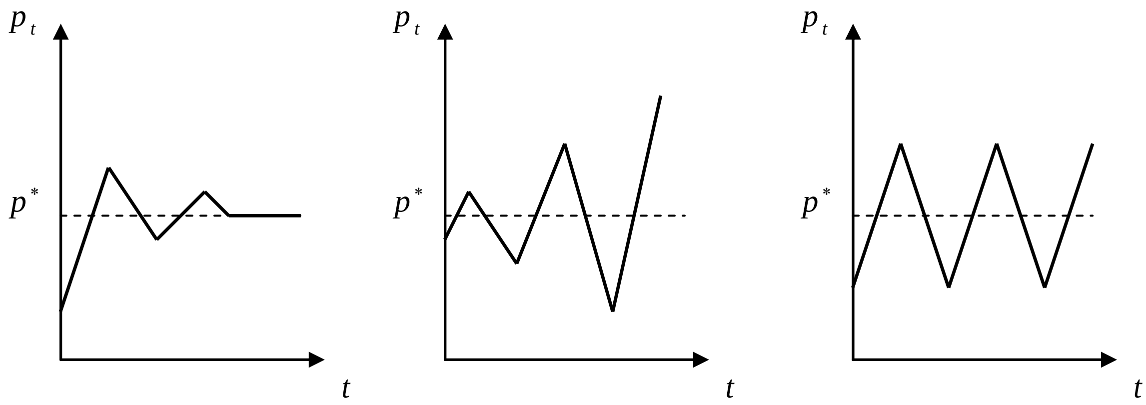
и колебания цены имеют постоянную амплитуду.

Схематичное графическое истолкование итерационного процесса установления равновесной цены на рынке одного товара на основе паутинообразной модели с запаздыванием спроса при разных соотношениях между угловыми коэффициентами наклона функции спроса b и функции предложения e показано на рис. 11. Соответствующие им зависимости цены товара от номера интервала времени представлены на рис. 12.



а) $e < b$ б) $e > b$ в) $e = b$

Рис. 11. **Графическое истолкование процесса установления равновесной цены при разных соотношениях между угловыми коэффициентами наклона функций спроса и предложения**



а) $e < b$ б) $e > b$ в) $e = b$

Рис. 12. **Зависимости цены товара от времени при разных соотношениях между угловыми коэффициентами наклона функций спроса и предложения**

Решение

Равенство спроса и предложения достигается при выполнении условия

$$D(p)=S(p).$$

В данной задаче $D(p)=q=\dfrac{p+6}{p+1}$, $S(p)=s=2p+1,5$.

Поэтому условие равновесия спроса и предложения имеет вид

$$\frac{p+6}{p+1}=2p+1,5.$$

Отсюда:

$p+6=(2p+1,5)(p+1)$, $p\neq-1$ (выполняется автоматически, так как $p\geq 0$);

$$p+6=2p^2+2p+1,5p+1,5;\ 2p^2+2,5p-4,5=0.$$

Полученное уравнение является квадратным уравнением с одним неизвестным вида $ax^2+bx+c=0$. Решение такого уравнения в общем виде определяется выражением

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}, \text{ где } D=b^2-4ac.$$

В полученном уравнении $a=2$, $b=2,5$; $c=-4,5$.Поэтому дискриминант квадратного уравнения равен

$$D=2,5^2-4\cdot2\cdot(-4,5)=6,25+36=42,25.$$

Тогда

$$p_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{-2,5+\sqrt{42,25}}{2\cdot2}=\frac{-2,5+6,5}{4}=\frac{4}{4}=1,$$

$$p_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{-2,5-\sqrt{42,25}}{2\cdot2}=\frac{-2,5-6,5}{4}=\frac{-9}{4}=-4,5.$$

Так как цена не может быть отрицательной ($p\geq0$), то при этом условии полученное квадратное уравнение имеет одно решение, которое является равновесной ценой, то есть $p^*=1$.

Тогда равновесные спрос и предложение будут равны

$$D^*(p)=D(p^*)=q^*=\frac{p^*+6}{p^*+1}=\frac{1+6}{1+1}=\frac{7}{2}=3,5,$$

$$S^*(p)=S(p^*)=s^*=2p^*+1,5=2\cdot1+1,5=3,5.$$

Номер варианта ответа: 1.

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ВЫПОЛНЕНИЯ

Среди заданий для самостоятельного выполнения имеются задания, теоретические сведения для выполнения которых в данном пособии не рассмотрены. Номера таких заданий отмечены символом “*”. При отсутствии остаточных знаний для выполнения этих заданий следует воспользоваться рекомендованными учебными пособиями.

3.1. Задания для самостоятельного выполнения по теории вероятностей

Задания для самостоятельного выполнения по теме “Теория вероятностей: основные понятия”

Задание № 1.

Вероятность наступления некоторого события **не может** быть равна …

Варианты ответов:

1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) $\frac{1}{2}$.

Задание № 2.

В урне находятся 6 шаров: 3 белых и 3 черных. Событие А – “вынули белый шар”. Событие В – “вынули черный шар”. Опыт состоит в выборе только одного шара. Тогда для этих событий **неверным** будет утверждение:

Варианты ответов:

1) “События А и В равновероятны”; 2) “Вероятность события В равна $\frac{1}{2}$”; 3) “Событие А невозможно”; 4) “События А и В несовместны”.

Задание № 3.

Игральная кость бросается один раз. Тогда вероятность того, что на верхней грани выпадет **5 очков**, равна …

Варианты ответов:

1) 0,1; 2) $\frac{5}{6}$; 3) $\frac{1}{6}$; 4) $\frac{1}{5}$.

Задание № 4.

Игральная кость бросается один раз. Тогда вероятность того, что на верхней грани выпадет **нечетное число очков**, равна …

Варианты ответов:

1) 0; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{6}$.

Задание № 5.

Игральная кость бросается один раз. Тогда вероятность того, что на верхней грани выпадет **число очков больше, чем три,** равна …

Варианты ответов:

1) 0; 2) 1; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{3}$.

Задание № 6.

Игральная кость бросается один раз. Тогда вероятность того, что на верхней грани выпадет **не менее пяти очков**, равна …

Варианты ответов:

1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{5}{6}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{6}$.

Задание № 7.

Игральная кость бросается один раз. Тогда вероятность того, что на верхней грани выпадет **не менее трех очков**, равна …

Варианты ответов:

1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{3}$.

Задание № 8.

Игральная кость бросается один раз. Тогда вероятность того, что на верхней грани выпадет **четное число очков**, равна …

Варианты ответов:

1) $\frac{1}{2}$; 2) 1; 3) $\frac{1}{6}$; 4) $\frac{1}{3}$.

Задание № 9.

Игральная кость бросается один раз. Тогда вероятность того, что на верхней грани выпадет **не более четырех очков**, равна …

Варианты ответов:

1) $\frac{5}{6}$; 2) $\frac{1}{6}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{2}{3}$.

Задание № 10.

Игральная кость бросается один раз. Тогда вероятность того, что на верхней грани выпадет **не менее четырех очков**, равна …

Варианты ответов:

1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{1}{6}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{3}$.

Задание № 11.

Игральная кость бросается один раз. Тогда вероятность того, что на верхней грани выпадет **более одного очка**, равна …

Варианты ответов:

1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{1}{6}$; 4) $\frac{5}{6}$.

Задание № 12.

Наиболее вероятным числом выпадений герба при 5 бросаниях монеты является …

Варианты ответов:

1) 2; 2) 3; 3) 3 и 2; 4) 4.

Задание № 13.*

В слове “WORD” меняют местами буквы. Тогда количество всех возможных различных “слов” равно …

Варианты ответов:

1) 8; 2) 16; 3) 24; 4) 20.

Задание № 14.*

Количество различных двузначных чисел, которые можно составить из четырех цифр: 1, 2, 3, 4 (все цифры в числе разные), равно …

Варианты ответов:

1) 12; 2) 24; 3) 6; 4) 4.

Задание № 15.*

Количество различных способов выбора (порядок не имеет значения) 2 томов из 12-томного собрания сочинений Л.Н. Толстого равно …

Варианты ответов:

1) 66; 2) 132; 3) 24; 4) 2.

Задание № 16.*

Количество способов, которыми читатель может выбрать 4 книги из 11, равно …

Варианты ответов:

1) 341; 2) 330; 3) 353; 4) 326.

Задание № 17.*

Количество способов, которыми можно разделить 6 различных учебников поровну между 3-мя студентами, равно …

Варианты ответов:

1) 9; 2) 90; 3) 15; 4) 6.

Задание № 18.[*]

Количество способов, которыми можно рассадить 4 человека в поезд из 8-ми вагонов при условии, что все они поедут в разных вагонах, равно …

Варианты ответов:

1) 32; 2) 4096; 3) 1680; 4) 70.

Задания для самостоятельного выполнения по теме “Теоремы сложения и умножения вероятностей ”

Задание № 19.

A, B, C - попарно независимые события. Их вероятности: $p(A)=0,4$, $p(B)=0,8$, $p(C)=0,3$. Укажите соответствие между событиями и их вероятностями:

1. $A \cdot B$.
2. $A \cdot C$.
3. $B \cdot C$.
4. $A \cdot B \cdot C$.

Варианты ответов:

A) 1,5; B) 0,32; C) 0,12; D) 0,24; E) 0,096.

Задание № 20.

Для посева берут семена из двух пакетов. Вероятности прорастания семян в первом и втором пакетах соответственно равны 0,9 и 0,7. Взяли по одному семени из каждого пакета, тогда вероятность того, что оба они прорастут равна …

Варианты ответов:

1) 0,9; 2) 0,63; 3) 1,6; 4) 0,8.

Задание № 21.

По оценкам экспертов вероятности банкротства для двух предприятий, производящих однотипную продукцию, равны 0,2 и 0,25. Тогда вероятность банкротства обоих предприятий равна …

Варианты ответов:

1) 0,05; 2) 0,6; 3) 0,45; 4) 0,5.

Задание № 22.

По оценкам экспертов вероятности банкротства для двух предприятий, производящих однотипную продукцию, равны 0,1 и 0,25. Тогда вероятность банкротства обоих предприятий равна …

Варианты ответов:

1) 0,675; 2) 0,35; 3) 0,025; 4) 0,25.

Задание № 23.

Два стрелка производят по одному выстрелу. Вероятности попадания в цель для первого и второго стрелков равны 0,6 и 0,3 соответственно. Тогда вероятность того, что в цель попадут оба стрелка, равна …

Варианты ответов:

1) 0,18; 2) 0,28; 3) 0,9; 4) 0,15.

Задание № 24.

Два стрелка производят по одному выстрелу. Вероятности попадания в цель для первого и второго стрелков равны 0,8 и 0,75 соответственно. Тогда вероятность того, что цель будет поражена, равна …

Варианты ответов:

1) 0,60; 2) 0,40; 3) 0,95; 4) 0,55.

Задание № 25.

Из урны, в которой находятся 3 черных и 7 белых шаров, вынимают 2 шара. Тогда вероятность того, что оба шара будут черными, равна …

Варианты ответов:

1) $\frac{2}{15}$; 2) $\frac{47}{90}$; 3) $\frac{1}{15}$; 4) $\frac{7}{15}$.

Задание № 26.

Из урны, в которой находятся 4 черных и 6 белых шаров, вынимают 2 шара. Тогда вероятность того, что оба шара будут черными, равна …

Варианты ответов:

1) $\frac{4}{15}$; 2) $\frac{11}{15}$; 3) $\frac{2}{15}$; 4) $\frac{1}{3}$.

Задание № 27.

Из урны, в которой находятся 4 черных и 7 белых шаров, вынимают 2 шара. Тогда вероятность того, что оба шара будут черными, равна …

Варианты ответов:

1) $\frac{4}{55}$; 2) $\frac{73}{110}$; 3) $\frac{6}{55}$; 4) $\frac{21}{55}$.

Задание № 28.

Из урны, в которой находятся 4 черных и 8 белых шаров, вынимают 2 шара. Тогда вероятность того, что оба шара будут черными, равна …

Варианты ответов:

1) $\frac{14}{33}$; 2) $\frac{1}{11}$; 3) $\frac{4}{33}$; 4) $\frac{20}{33}$.

Задание № 29.*

В первой урне 3 белых и 7 черных шаров. Во второй урне 3 белых и 17 черных шаров. Из наудачу взятой урны вынули один шар. Тогда вероятность того, что этот шар окажется белым, равна …

Варианты ответов:

1) $\frac{1}{5}$; 2) $\frac{9}{20}$; 3) $\frac{11}{40}$; 4) $\frac{9}{40}$.

Задание № 30.*

В первой урне 3 белых и 7 черных шаров. Во второй урне 13 белых и 7 черных шаров. Из наудачу взятой урны вынули один шар. Тогда вероятность того, что этот шар окажется белым, равна …

Варианты ответов:

1) $\frac{8}{15}$; 2) $\frac{17}{40}$; 3) $\frac{19}{40}$; 4) $\frac{19}{20}$.

Задание № 31.*

В первой урне 7 белых и 3 черных шаров. Во второй урне 5 белых и 15 черных шаров. Из наудачу взятой урны вынули один шар. Тогда вероятность того, что этот шар окажется белым, равна …

Варианты ответов:

1) $\frac{19}{40}$; 2) $\frac{19}{20}$; 3) $\frac{21}{40}$; 4) $\frac{2}{5}$.

Задание № 32.*

В первой урне 7 белых и 3 черных шаров. Во второй урне 9 белых и 11 черных шаров. Из наудачу взятой урны вынули один шар. Тогда вероятность того, что этот шар окажется белым, равна …

Варианты ответов:

1) $\frac{23}{40}$; 2) $\frac{21}{40}$; 3) $\frac{8}{15}$; 4) $\frac{1}{8}$.

Задание № 33.*

В первой урне 4 черных и 6 белых шаров. Во второй урне 3 белых и 7 черных шаров. Из наудачу взятой урны вынули один шар. Тогда вероятность того, что этот шар окажется белым, равна …

Варианты ответов:

1) 0,9; 2) 0,15; 3) 0,45; 4) 0,4.

Задание № 34.*

В первой урне 7 белых и 3 черных шаров. Во второй урне 11 белых и 9 черных шаров. Из наудачу взятой урны вынули один шар. Тогда вероятность того, что этот шар окажется белым, равна …

Варианты ответов:

1) $\frac{3}{20}$; 2) $\frac{23}{40}$; 3) $\frac{5}{8}$; 4) $\frac{3}{5}$.

Задание № 35.*

В первой урне 3 белых и 7 черных шаров. Во второй урне 7 белых и 13 черных шаров. Из наудачу взятой урны вынули один шар. Тогда вероятность того, что этот шар окажется белым, равна …

Варианты ответов:

1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{13}{20}$; 3) $\frac{13}{40}$; 4) $\frac{11}{40}$.

Задание № 36.*

В первом ящике 7 красных и 11 синих шаров, во втором 5 красных и 9 синих. Из произвольного ящика достают один шар. Вероятность того, что он синий, равна …

Варианты ответов:

1) $\frac{11}{18}\cdot\frac{9}{14}$; 2) $\frac{11+9}{18+14}$; 3) $\frac{11}{18}+\frac{9}{14}$; 4) $\frac{1}{2}\left(\frac{11}{18}+\frac{9}{14}\right)$.

Задания для самостоятельного выполнения по теме “Биномиальный закон распределения вероятностей”

Задание № 37.

Вероятность выиграть у равносильного противника 2 из 4 партий (ничьи не в счет) равна …

Варианты ответов:

1) $\frac{1}{16}$; 2) $\frac{1}{8}$; 3) $\frac{3}{8}$; 4) $\frac{1}{2}$.

Задание № 38.

Игральную кость бросают 10 раз. Вероятность того, что ровно 3 раза появится четная грань, равна …

Варианты ответов:

1) $\frac{1}{1024}$; 2) $\frac{15}{128}$; 3) $\frac{1}{128}$; 4) $\frac{1}{8}$.

Задание № 39.

Вероятность появления события A в 20 независимых испытаниях, проводимых по схеме Бернулли, равна 0,9. Тогда дисперсия числа появлений этого события равна …

Варианты ответов:

1) 0,18; 2) 0,45; 3) 1,8; 4) 18.

Задание № 40.

Вероятность появления события A в 20 независимых испытаниях, проводимых по схеме Бернулли, равна 0,4. Тогда дисперсия числа появлений этого события равна …

Варианты ответов:

1) 4,8; 2) 0,48; 3) 8; 4) 0,02.

Задание № 41.

Вероятность появления события A в 40 независимых испытаниях, проводимых по схеме Бернулли, равна 0,5. Тогда дисперсия числа появлений этого события равна …

Варианты ответов:

1) 1,25; 2) 1; 3) 20; 4) 10.

Задание № 42.

Вероятность появления события A в 40 независимых испытаниях, проводимых по схеме Бернулли, равна 0,8. Тогда дисперсия числа появлений этого события равна …

Варианты ответов:

1) 0,64; 2) 32; 3) 0,02; 4) 6,4.

Задания для самостоятельного выполнения по теме “Законы распределения вероятностей дискретных и непрерывных случайных величин”

Задание № 43.

Дан закон распределения вероятностей дискретной случайной величины X :

X	1	2	3	4
P	0,2	0,3	0,4	a

Тогда значение a равно …

Варианты ответов:

1) 0,2; 2) 0,7; 3) 0,1; 4) – 0,7.

Задание № 44.
Пусть X - дискретная случайная величина, заданная законом распределения:

X	- 1	3
P	0,4	0,6

Тогда математическое ожидание этой случайной величины равно …

Варианты ответов:

1) 2,2; 2) 1,4; 3) 2; 4) 1.

Задание № 45.
Пусть X - дискретная случайная величина, заданная законом распределения:

X	1	4
P	0,4	0,6

Тогда математическое ожидание этой случайной величины равно …

Варианты ответов:

1) 2,2; 2) 2,8; 3) 1; 4) 5.

Задание № 46.
Пусть X - дискретная случайная величина, заданная законом распределения:

X	2	3	6
P	0,2	0,3	0,5

Тогда математическое ожидание этой случайной величины равно …

Варианты ответов:

1) 4,3; 2) 11; 3) 3,0; 4) 0,9.

Задание № 47.
Дискретная случайная величина задана законом распределения вероятностей:

X	- 1	2	4
P	0,1	a	b

Тогда ее математическое ожидание равно 3,3, если …

Варианты ответов:

1) $a = 0,2$, $b = 0,7$; 2) $a = 0,1$, $b = 0,8$; 3) $a = 0,8$, $b = 0,1$; 4) $a = 0,1$, $b = 0,9$.

Задание № 48.
Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей:

X	- 1	0	3
P	0,1	0,3	0,6

Тогда математическое ожидание случайной величины $Y = 2X$ равно …

Варианты ответов:

1) 3,4; 2) 4; 3) 3,8; 4) 3,7.

Задание № 49.

Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей:

X	1	3	5
P	0,3	0,2	0,5

Тогда математическое ожидание случайной величины $Y = X^2$ равно …

Варианты ответов:

1) 14,6; 2) 81; 3) 1,8; 4) 1,46.

Задание № 50.

Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей:

X	3	4	7
P	0,4	0,1	0,5

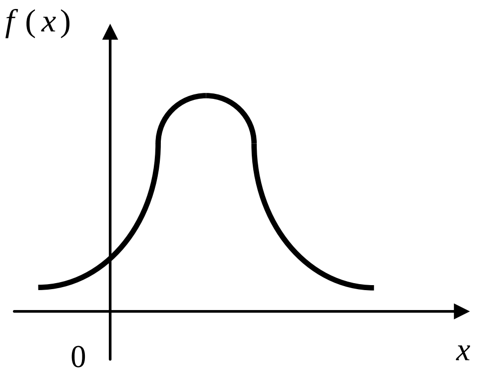
Тогда дисперсия этой случайной величины равна …

Варианты ответов:

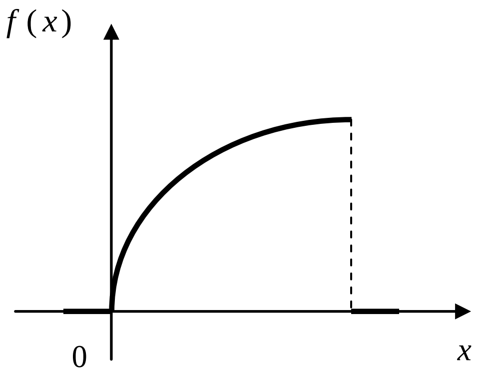
1) 3,69; 2) 74; 3) 29,7; 4) 24,6.

Задание № 51.

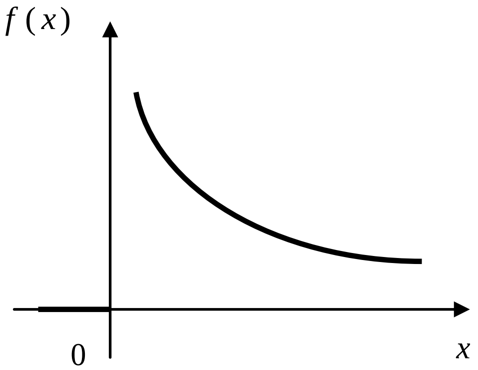
График плотности распределения вероятностей для нормального распределения изображен на рисунке …



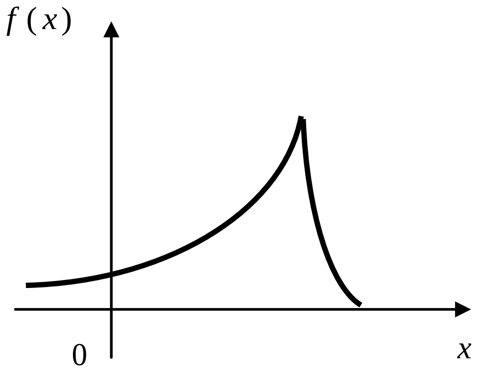
A)



B)



C)



D)

1) A; 2) B; 3) C; 4) D.

Задание № 52.

Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей $f(x)=\dfrac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-4)^2}{18}}$.

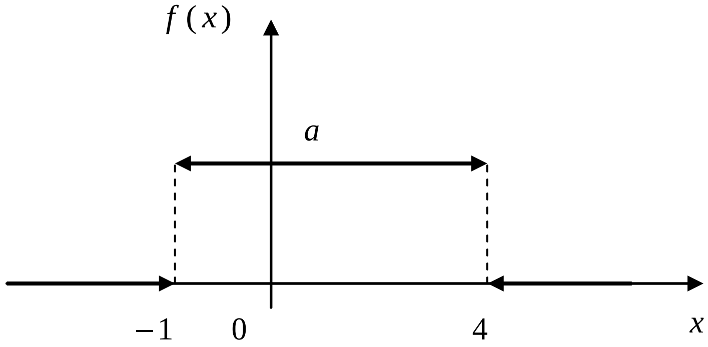
Тогда математическое ожидание этой нормально распределенной случайной величины равно …

Варианты ответов:

1) 9; 2) 4; 3) 18; 4) 3.

Задание № 53.

График плотности распределения вероятностей непрерывной случайной величины X имеет вид:



Тогда значение a равно …

Варианты ответов:

1) 0,20; 2) 1; 3) 0,25; 4) 0,33.

Задание № 54.

Случайная величина X распределена равномерно на отрезке $[2,5]$. Распределение случайной величины $Y=3X-1$ имеет …

Варианты ответов:

1) равномерное распределение на отрезке $[6,15]$;
2) нормальное распределение на отрезке $[2,5]$;
3) другой (кроме равномерного и нормального) вид распределения;
4) равномерное распределение на отрезке $[5,14]$.

Задание № 55.

Непрерывная случайная величина X распределена равномерно на отрезке $[-11,20]$. Тогда вероятность $P(X\le 0)$ равна …

Варианты ответов:

1) $\dfrac{10}{31}$; 2) $\dfrac{11}{32}$; 3) $\dfrac{5}{16}$; 4) $\dfrac{11}{31}$.

Задание № 56.

Непрерывная случайная величина X распределена равномерно на отрезке $[-11, 26]$. Тогда вероятность $P(X > -4)$ равна …

Варианты ответов:

1) $\frac{29}{38}$; 2) $\frac{29}{37}$; 3) $\frac{30}{37}$; 4) $\frac{15}{19}$.

3.2. Задания для самостоятельного выполнения по математической статистике

Задания для самостоятельного выполнения по теме "Статистическое распределение выборки"

Задание № 57.

Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 50$:

x_i	1	2	3	4
n_i	n_1	11	10	9

Тогда n_1 равен …

Варианты ответов:

1) 21; 2) 50; 3) 20; 4) 12.

Задание № 58.

Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 50$:

x_i	1	2	3	4
n_i	10	9	8	n_4

Тогда n_4 равен …

Варианты ответов:

1) 23; 2) 24; 3) 7; 4) 50.

Задание № 59.

Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 50$:

x_i	1	2	3	4
n_i	n_1	9	8	7

Тогда n_1 равен …

Варианты ответов:

1) 10; 2) 50; 3) 27; 4) 26.

Задание № 60.
Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 50$:

x_i	1	2	3	4
n_i	10	n_2	8	7

Тогда n_2 равен …

Варианты ответов:

1) 25; 2) 26; 3) 50; 4) 9.

Задание № 61.
Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 50$:

x_i	1	2	3	4
n_i	13	12	11	n_4

Тогда n_4 равен …

Варианты ответов:

1) 50; 2) 14; 3) 15; 4) 10.

Задание № 62.
Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 50$:

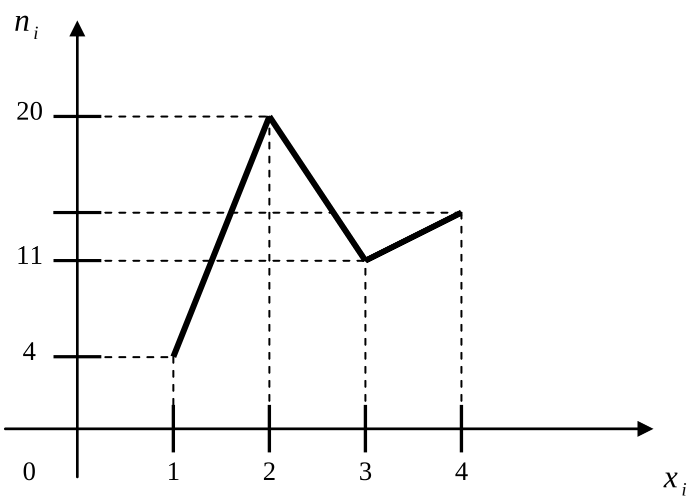
x_i	1	2	3	4
n_i	12	11	n_3	9

Тогда n_3 равен …

Варианты ответов:

1) 19; 2) 10; 3) 18; 4) 50.

Задание № 63.
Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 50$, полигон частот которой имеет вид.



Тогда число вариант $x_i = 4$ в выборке равно …

Варианты ответов:

1) 14; 2) 50; 3) 16; 4) 15.

Задания для самостоятельного выполнения по теме "Точечные оценки параметров распределения"

Задание № 64.

Проведено четыре измерения (без систематических ошибок) некоторой случайной величины (в мм): **5, 6, 9, 12**. Тогда несмещенная оценка математического ожидания равна …

Варианты ответов:

1) 8; 2) 8,25; 3) 7; 4) 8,5.

Задание № 65.

Проведено 5 измерений (без систематических ошибок) некоторой случайной величины (в мм): **5, 6, 9, 10, 11**. Тогда несмещенная оценка математического ожидания равна …

Варианты ответов:

1) 9; 2) 8,2; 3) 10,25; 4) 8,4.

Задание № 66.

Проведено 5 измерений (без систематических ошибок) некоторой случайной величины (в мм): **6, 7, 10, 11, 12**. Тогда несмещенная оценка математического ожидания равна …

Варианты ответов:

1) 11,5; 2) 10; 3) 9,2; 4) 9,4.

Задание № 67.

Проведено 5 измерений (без систематических ошибок) некоторой случайной величины (в мм): **7, 8, 11, 12, 13**. Тогда несмещенная оценка математического ожидания равна …

Варианты ответов:

1) 10,2; 2) 11; 3) 10,4; 4) 12,75.

Задание № 68.

Проведено 5 измерений (без систематических ошибок) некоторой случайной величины (в мм): **8, 9, 12, 13, 14**. Тогда несмещенная оценка математического ожидания равна …

Варианты ответов:

1) 14; 2) 11,2; 3) 12; 4) 11,4.

Задание № 69.

Проведено 5 измерений (без систематических ошибок) некоторой случайной величины (в мм): **9, 10, 13, 14, 15**. Тогда несмещенная оценка математического ожидания равна …

Варианты ответов:

1) 12,2; 2) 15,25; 3) 12,4; 4) 13.

Задание № 70.

В результате измерений некоторой физической величины одним прибором (без систематических ошибок) получены следующие результаты (в мм): **12, 14, 16**. Тогда несмещенная оценка дисперсии измерений равна …

Варианты ответов:

1) 4; 2) 3; 3) 14; 4) 8.

Задание № 71.

В результате измерений некоторой физической величины одним прибором (без систематических ошибок) получены следующие результаты (в мм): **12, 15, 15**. Тогда несмещенная оценка дисперсии измерений равна …

Варианты ответов:

1) 14; 2) 6; 3) 2; 4) 3.

Задание № 72.*

Мода вариационного ряда **1, 2, 2, 3, 4, 5** равна …

Варианты ответов:

1) 17; 2) 5; 3) 2; 4) 3.

Задание № 73.*

Мода вариационного ряда **1, 4, 4, 5, 6, 8, 9** равна …

Варианты ответов:

1) 4; 2) 5; 3) 1; 4) 9.

Задания для самостоятельного выполнения по теме “Интервальные оценки параметров распределения”

Задание № 74.

Точечная оценка математического ожидания нормального распределения равна 10. Тогда его интервальная оценка может иметь вид …

Варианты ответов:

1) (10; 10,9); 2) (8,5; 11,5); 3) (8,4; 10); 4) (8,6; 9,6).

Задание № 75.

Точечная оценка математического ожидания нормального распределения равна 20. Тогда его интервальная оценка может иметь вид …

Варианты ответов:

1) (19; 21); 2) (19; 20); 3) (20; 21); 4) (0; 20).

Задание № 76.

Точечная оценка математического ожидания нормального распределения равна 21. Тогда его интервальная оценка может иметь вид …

Варианты ответов:

1) (20; 22); 2) (21; 22); 3) (0; 21); 4) (20; 21).

Задание № 77.

Точечная оценка параметра распределения равна 24. Тогда его интервальная оценка может иметь вид …

Варианты ответов:

1) (23; 24); 2) (24; 25); 3) (0; 24); 4) (23; 25).

Задание № 78.

Точечная оценка параметра распределения равна 25. Тогда его интервальная оценка может иметь вид …

Варианты ответов:

1) (0; 25); 2) (24; 25); 3) (24; 26); 4) (25; 26).

Задание № 79.

Точечная оценка параметра распределения равна 27. Тогда его интервальная оценка может иметь вид …

Варианты ответов:

1) (26; 28); 2) (26; 27); 3) (27; 28); 4) (0; 27).

Задание № 80.

Точечная оценка параметра распределения равна 29. Тогда его интервальная оценка может иметь вид …

Варианты ответов:

1) (29; 30); 2) (0; 29); 3) (28; 29); 4) (28; 30).

Задания для самостоятельного выполнения по теме “Проверка статистических гипотез”

Задание № 81.

Если основная гипотеза имеет вид $H_0: a=6$, то конкурирующей может быть гипотеза …

Варианты ответов:

1) $H_1: a \geq 6$; 2) $H_1: a<5$; 3) $H_1: a \neq 6$; 4) $H_1: a>7$.

Задание № 82.

Если основная гипотеза имеет вид $H_0: a=7$, то конкурирующей может быть гипотеза …

Варианты ответов:

1) $H_1: a=6$; 2) $H_1: a \leq 6$; 3) $H_1: a \neq 7$; 4) $H_1: a \geq 7$.

Задание № 83.

Если основная гипотеза имеет вид $H_0: a=10$, то конкурирующей может быть гипотеза …

Варианты ответов:

1) $H_1: a \neq 10$; 2) $H_1: a \leq 20$; 3) $H_1: a \leq 10$; 4) $H_1: a \geq 10$.

Задание № 84.

Если основная гипотеза имеет вид $H_0: \sigma^2=2$, то конкурирующей может быть гипотеза …

Варианты ответов:

1) $H_1: \sigma^2 \geq 2$; 2) $H_1: \sigma^2<2$; 3) $H_1: \sigma^2 \leq 1,9$; 4) $H_1: \sigma^2=1$.

Задание № 85.

Если основная гипотеза имеет вид $H_0: p=0,5$, то конкурирующей может быть гипотеза …

Варианты ответов:

1) $H_1: p>0,6$; 2) $H_1: p=0,6$; 3) $H_1: p \leq 0,5$; 4) $H_1: p \neq 0,5$.

Задание № 86.

Если основная гипотеза имеет вид $H_0: p=0,6$, то конкурирующей может быть гипотеза …

Варианты ответов:

1) $H_1: p \geq 0,7$; 2) $H_1: p=0,7$; 3) $H_1: p \leq 0,6$; 4) $H_1: p<0,6$.

3.3. Задания для самостоятельного выполнения по экономико-математическим методам

Задания для самостоятельного выполнения по теме “Линейное программирование: аналитическое задание области допустимых решений”

Задание № 87.

Максимальное значение целевой функции $z = x_1 + 3x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 \le 4, \\ x_1 \ge 0,\, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

равно …

Варианты ответов:

1) 18; 2) 19; 3) 10; 4) 6.

Задание № 88.

Максимальное значение целевой функции $z = 2\,x_1 + x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 \le 4, \\ x_1 \ge 0,\, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

равно …

Варианты ответов:

1) 10; 2) 11; 3) 6; 4) 12.

Задание № 89.

Максимальное значение целевой функции $z = 3\,x_1 + x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 \le 4, \\ x_1 \ge 0,\, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

равно …

Варианты ответов:

1) 12; 2) 15; 3) 10; 4) 14.

Задание № 90.

Минимальное значение целевой функции $z = -\,x_1 - 4x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 8, \\ x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0,\, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

равно …

Варианты ответов:

1) - 8; 2) - 14; 3) - 15; 4) - 26.

Задание № 91.

Минимальное значение целевой функции $z = -x_1 - 3x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 8, \\ x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0,\, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

равно …

Варианты ответов:

1) - 12; 2) - 8; 3) - 13; 4) - 20.

Задание № 92.

Минимальное значение целевой функции $z = -3x_1 - x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 8, \\ x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0,\, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

равно …

Варианты ответов:

1) - 20; 2) - 25; 3) - 24; 4) - 8.

Задания для самостоятельного выполнения по теме “Нелинейное программирование”

Задание № 93.

Минимум функции $z = x^2 + y^2$ при условии $\frac{x}{2} + \frac{y}{7} = 1$ равен …

Варианты ответов:

1) 0; 2) $\frac{196}{53}$; 3) $\frac{98}{53}$; 4) $\frac{53}{196}$.

Задание № 94.

Минимум функции $z = x^2 + y^2$ при условии $\frac{x}{5} + \frac{y}{6} = 1$ равен …

Варианты ответов:

1) $\frac{900}{61}$; 2) $\frac{450}{61}$; 3) 0; 4) $\frac{61}{900}$.

Задание № 95.

Минимум функции $z = x^2 + y^2$ при условии $x + \frac{y}{5} = 1$ равен …

Варианты ответов:

1) $\frac{25}{26}$; 2) 0; 3) $\frac{26}{25}$; 4) $\frac{25}{13}$.

Задание № 96.

Минимум функции $z = x^2 + y^2$ при условии $x + \frac{y}{4} = 1$ равен …

Варианты ответов:

1) $\frac{16}{17}$; 2) 0; 3) $\frac{8}{17}$; 4) $\frac{17}{16}$.

Задание № 97.

Минимум функции $z = x^2 + y^2$ при условии $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ равен …

Варианты ответов:

1) $\frac{36}{13}$; 2) 0; 3) $\frac{13}{36}$; 4) $\frac{6}{13}$.

Задание № 98.

Минимум функции $z = x^2 + y^2$ при условии $\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$ равен …

Варианты ответов:

1) $\frac{72}{13}$; 2) $\frac{13}{144}$; 3) 0; 4) $\frac{144}{13}$.

Задание № 99.

Минимум функции $z = x^2 + y^2$ при условии $x + \frac{y}{2} = 1$ равен …

Варианты ответов:

1) $\frac{2}{5}$; 2) $\frac{4}{5}$; 3) 0; 4) $\frac{5}{4}$.

Задания для самостоятельного выполнения по теме “Транспортная задача”

Задание № 100.
Транспортная задача

	50	60 + b	200
100 + a	7	2	4
200	3	5	6

будет закрытой, если …

Варианты ответов:

1) $a = 30$, $b = 40$; 2) $a = 30$, $b = 20$; 3) $a = 30$, $b = 5$; 4) $a = 30$, $b = 10$.

Задание № 101.
Транспортная задача

	50	60 + b	200
100 + a	7	2	4
200	3	5	6

будет закрытой, если …

Варианты ответов:

1) $a = 25$, $b = 5$; 2) $a = 25$, $b = 10$; 3) $a = 25$, $b = 15$; 4) $a = 25$, $b = 20$.

Задание № 102.
Транспортная задача

	30	100 + b
20	3	9
30 + a	4	1
100	6	8

будет закрытой, если …

Варианты ответов:

1) $a = 55$, $b = 75$; 2) $a = 55$, $b = 70$; 3) $a = 55$, $b = 65$; 4) $a = 55$, $b = 80$.

3.4. Задания для самостоятельного выполнения по экономико-математическим моделям

Задания для самостоятельного выполнения по теме “Функции полезности”

Задание № 103.

Функция полезности потребителя имеет вид $u = \sqrt{xy}$. Цена на благо x равна 10, на благо y равна 4, доход потребителя равен 200. Тогда оптимальный набор благ потребителя имеет вид …

Варианты ответов:

1) $x = 25$, $y = 25$; 2) $x = 12$, $y = 20$; 3) $x = 0$, $y = 50$; 4) $x = 10$, $y = 25$.

Задание № 104.

Функция полезности потребителя имеет вид $u = \sqrt{xy}$. Цена на благо x равна 10, на благо y равна 20, доход потребителя равен 200. Тогда оптимальный набор благ потребителя имеет вид …

Варианты ответов:

1) x = 20, y = 0; 2) x = 10, y = 5; 3) x = 4, y = 8; 4) x = 10, y = 10.

Задание № 105.

Функция полезности потребителя имеет вид $u = \sqrt{xy}$. Цена на благо x равна 5, на благо y равна 20, доход потребителя равен 200. Тогда оптимальный набор благ потребителя имеет вид …

Варианты ответов:

1) x = 40, y = 0; 2) x = 24, y = 4; 3) x = 20, y = 5; 4) x = 20, y = 20.

Задание № 106.

Функция полезности потребителя имеет вид $u = \sqrt{xy}$. Цена на благо x равна 10, на благо y равна 5, доход потребителя равен 200. Тогда оптимальный набор благ потребителя имеет вид …

Варианты ответов:

1) x = 20, y = 20; 2) x = 10, y = 20; 3) x = 0, y = 40; 4) x = 16, y = 8.

Задания для самостоятельного выполнения по теме “Функции выпуска продукции”

Задание № 107.

Производственная функция задается как $Y = K^{0,5} \cdot L^{0,5}$, где K - капитал, L - труд. Тогда предельный продукт капитала при $K = 4$, $L = 16$ равен …

Варианты ответов:

1) 2; 2) 1; 3) 8; 4) 0,25.

Задание № 108.

Производственная функция задается как $Y = K^{0,5} \cdot L^{0,5}$, где K - капитал, L - труд. Тогда предельный продукт капитала при $K = 4$, $L = 25$ равен …

Варианты ответов:

1) 0,2; 2) 1,25; 3) 0,4; 4) 2,5.

Задание № 109.

Производственная функция задается как $Y = K^{0,5} \cdot L^{0,5}$, где K - капитал, L - труд. Тогда предельный продукт труда при $K = 9$, $L = 36$ равен …

Варианты ответов:

1) 18; 2) 1; 3) 0,5; 4) 0,25.

Задание № 110.

Производственная функция задается как $Y = K^{0,5} \cdot L^{0,5}$, где K - капитал, L - труд. Тогда предельный продукт капитала при $K = 16$, $L = 25$ равен …

Варианты ответов:

1) 0,4; 2) 1,25; 3) 20; 4) 0,625.

Задание № 111.

Производственная функция задается как $Y = K^{0,5} \cdot L^{0,5}$, где K - капитал, L - труд. Тогда предельный продукт капитала при $K = 50$, $L = 8$ равен …

Варианты ответов:

1) 1,25; 2) 20; 3) 0,2; 4) 2,5.

Задание № 112.*

Для мультипликативной производственной функции $Y = 2K^{0,6} \cdot L^{0,62}$ коэффициент эластичности по труду равен …

Варианты ответов:

1) 0,62; 2) 3,22; 3) 0,6; 4) 1,22.

Задание № 113.*

Для мультипликативной производственной функции $Y = 2K^{0,6} \cdot L^{0,5}$ коэффициент эластичности по капиталу равен …

Варианты ответов:

1) 0,6; 2) 0,5; 3) 3,1; 4) 1,1.

Задание № 114.*

Для мультипликативной производственной функции $Y = 2K^{0,6} \cdot L^{0,51}$ коэффициент эластичности по капиталу равен …

Варианты ответов:

1) 0,51; 2) 3,11; 3) 0,6; 4) 1,11.

Задание № 115.*

Для мультипликативной производственной функции $Y = 2K^{0,59} \cdot L^{0,51}$ коэффициент эластичности по капиталу равен …

Варианты ответов:

1) 1,1; 2) 0,59; 3) 3,1; 4) 0,51.

Задание № 116.*

Для мультипликативной производственной функции $Y = 2\,K^{0,57} \cdot L^{0,59}$ коэффициент эластичности по капиталу равен …

Варианты ответов:

1) 3,16; 2) 0,57; 3) 1,16; 4) 0,59.

Задание № 117.

Зависимость между издержками производства C и объемом продукции Q выражается функцией $C = 26\,Q - 0,08\,Q^3$. Тогда предельные издержки при объеме производства $Q = 10$ равны …

Варианты ответов:

1) 2; 2) 18; 3) 180; 4) 23,6.

Задание № 118.

Зависимость между издержками производства C и объемом продукции Q выражается функцией $C = 28\,Q - 0,08\,Q^3$. Тогда предельные издержки при объеме производства $Q = 10$ равны …

Варианты ответов:

1) 4; 2) 200; 3) 25,6; 4) 20.

Задание № 119.

Зависимость между издержками производства C и объемом продукции Q выражается функцией $C = 29\,Q - 0,08\,Q^3$. Тогда предельные издержки при объеме производства $Q = 10$ равны …

Варианты ответов:

1) 5; 2) 26,6; 3) 21; 4) 210.

Задание № 120.

Зависимость между издержками производства C и объемом продукции Q выражается функцией $C = 34\,Q - 0,09\,Q^3$. Тогда предельные издержки при объеме производства $Q = 10$ равны …

Варианты ответов:

1) 25; 2) 31,3; 3) 250; 4) 7.

4. СВЕДЕНИЯ О РЕПЕТИЦИОННОМ ТЕСТИРОВАНИИ

Репетиционное тестирование предназначено:

1) для ознакомления студентов с программной оболочкой ТестЭкзаменатор, в которой выполняются задания Федерального Интернет-экзамена;

2) для ознакомления студентов с процедурой выполнения Интернет-экзамена по дисциплине;

3) для предварительной проверки студентами своих остаточных знаний по дисциплине.

Для репетиционного тестирования используются демонстрационные задания АПИМ.

Алгоритм выполнения репетиционного тестирования включает следующую последовательность действий.

1. Открытие главной страницы сайта “Федеральный Интернет-экзамен в сфере профессионального образования” по адресу: *http://www.fepo.ru*.

2. Переход в левой части главной страницы сайта в разделе “ТЕСТИРОВАНИЕ” по ссылке *“репетиционное вузам”* в диалоговое окно “Репетиционное тестирование для вуза”.

3. Выбор в окне “Репетиционное тестирование для вуза” в раскрывающихся списках полей ввода *“Специальность:”* и *“Дисциплина:”* необходимых сведений (например, “080103.65 – Национальная экономика” и “Математика” соответственно) и нажатие кнопки *“Далее ►”* для перехода в следующее окно “Основные правила тестирования” (для вызова раскрывающегося списка необходимо навести указатель мыши на кнопку “▼” в правой части поля ввода и нажать левую кнопку мыши).

4. Ознакомление с правилами тестирования в окне “Основные правила тестирования” и нажатие кнопки *“Начать тестирование ►”* для выполнения заданий Интернет-экзамена.

5. Выполнение заданий АПИМ по дисциплине в любой последовательности.

6. Нажатие кнопки *“Завершить тестирование”* после выполнения всех заданий для перехода в окно “Результаты тестирования”.

7. Ознакомление с результатами тестирования в окне “Результаты тестирования” и нажатие кнопки *“OK”* для возвращения на главную страницу сайта “Федеральный Интернет-экзамен в сфере профессионального образования”.

Форма представления результатов тестирования приведена в табл. 6.

Таблица 6

Форма представления результатов тестирования

Результаты тестирования	
Дисциплина:	Математика
Всего заданий:	32
Дано ответов:	32
Из них верно:	24
Процент верных ответов:	75 %

5. ОТВЕТЫ НА ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ВЫПОЛНЕНИЯ

Номер задания	Номер ответа	**Номер задания**	Номер ответа	**Номер задания**	Номер ответа	**Номер задания**	Номер ответа
1	3	**31**	1	**61**	2	**91**	1
2	3	**32**	1	**62**	3	**92**	3
3	3	**33**	3	**63**	4	**93**	2
4	3	**34**	3	**64**	1	**94**	1
5	3	**35**	3	**65**	2	**95**	1
6	1	**36**	4	**66**	3	**96**	1
7	2	**37**	3	**67**	1	**97**	1
8	1	**38**	2	**68**	2	**98**	4
9	4	**39**	3	**69**	1	**99**	2
10	3	**40**	1	**70**	1	**100**	2
11	4	**41**	4	**71**	4	**101**	3
12	3	**42**	4	**72**	3	**102**	1
13	3	**43**	3	**73**	1	**103**	4
14	1	**44**	2	**74**	2	**104**	2
15	1	**45**	2	**75**	1	**105**	3
16	2	**46**	1	**76**	1	**106**	2
17	3	**47**	2	**77**	4	**107**	2
18	4	**48**	1	**78**	3	**108**	2
19	1-В, 2-С, 3-Д, 4-Е	**49**	1	**79**	1	**109**	4
20	2	**50**	1	**80**	4	**110**	4
21	1	**51**	1	**81**	3	**111**	3
22	3	**52**	2	**82**	3	**112**	1
23	1	**53**	1	**83**	1	**113**	1
24	3	**54**	4	**84**	2	**114**	3
25	3	**55**	4	**85**	4	**115**	2
26	3	**56**	3	**86**	4	**116**	2
27	3	**57**	3	**87**	1	**117**	1
28	2	**58**	1	**88**	1	**118**	1
29	4	**59**	4	**89**	4	**119**	1
30	3	**60**	1	**90**	2	**120**	4

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Распоряжение Руководителя Федеральной службы по надзору в сфере образования и науки В.А. Болотова от 17.07.2006 г. № 1192-05 [Электронный ресурс]. – Электрон. текстовые дан. – М. : Рособрнадзор, 2006. – Режим доступа : http://www.fepo.ru/index.php?menu=about_rosobrnadzor2.
2. Письмо заместителя Руководителя Федеральной службы по надзору в сфере образования и науки Е.Н. Геворкян руководителям образовательных учреждений высшего профессионального образования от 10.03.2006 г. № 02-55-43ин/ак [Электронный ресурс]. – Электрон. текстовые дан. – М. : Рособрнадзор, 2006. – Режим доступа : http://www.fepo.ru/index.php?menu=about_rosobrnadzor.
3. Об Интернет-экзамене в сфере профессионального образования [Электронный ресурс] / В. Наводнов, А. Масленников. – Электрон. текстовые дан. – М. : Рособрнадзор, 2006. – Режим доступа : http://www.fepo.ru/index.php?menu=about_press_ie.
4. Модель оценки выполнения требований ГОС [Электронный ресурс]. – Электрон. текстовые дан. – М. : Рособрнадзор, 2006. – Режим доступа : http://www.fepo.ru/index.php?menu=method_model.
5. **Рыжиков, В.Н.** Краткий практический курс высшей математики. Контрольно-измерительные материалы [Текст] : учеб. пособие для студентов нематематических специальностей факультетов / В.Н. Рыжиков. – Тверь : Твер. гос. ун-т, 2007. – 84 с.
6. Интернет-экзамен в сфере профессионального образования. Специальность: 080103.65 – Национальная экономика. Дисциплина: Математика [Электронный ресурс]. – Электрон. текстовые дан. – Йошкар-Ола : Росаккредагентство, 2008. – Режим доступа : http://www.fepo.ru/index.php?menu=structs_demo.
7. **Гмурман, В.Е.** Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учеб. пособие / В.Е. Гмурман. – 12-е изд., перераб. - М. : Высшее образование, 2006. – 479 с.
8. **Гмурман, В.Е.** Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике [Текст] : учеб. пособие / В.Е. Гмурман. – 11-е изд., перераб. - М. : Высшее образование, 2006. – 404 с.
9. **Кремер, Н.Ш.** Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учеб. для вузов / Н.Ш. Кремер. - М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2001. – 543 с.
10. Прикладная статистика. Основы эконометрики [Текст] : учеб. для вузов: В 2 т. – 2-е изд., испр. - Т. 1. **Айвазян С.А., Мхитарян В.С.** Теория вероятностей и прикладная статистика. - М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2001. – 656 с.
11. **Фадеева, Л.Н.** Математика для экономистов: Теория вероятностей и математическая статистика. Курс лекций [Текст] : учеб. пособие. – М.: Эксмо, 2006. – 400 с.
12. **Фадеева, Л.Н.** Математика для экономистов: Теория вероятностей и математическая статистика. Задачи и упражнения [Текст] : учеб. пособие / Л.Н. Фадеева, Ю.В. Жуков, А.В. Лебедев. – М. : Эксмо, 2006. – 336 с.
13. **Васильев, А.А.** Математика: Общие понятия и классификации основных разделов прикладной математики, изучаемых студентами экономических специальностей [Текст] : учеб.-справоч. пособие / А.А. Васильев. – Тверь : Твер. гос. ун-т, 2006. – 104 с.
14. **Кремер, Н.Ш.** Исследование операций в экономике [Текст] : учеб. пособие для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман; под ред. Н.Ш. Кремера. - М. : ЮНИТИ, 2005. – 407 с.

15. **Кузнецов, Б.Т.** Математика [Текст] : учеб. для студентов вузов, обучающихся по специальностям экономики и управления (060000) / Б.Т. Кузнецов. – 2-е изд., переработ. и доп. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004. – 719 с.
16. **Шукурьян, С.И.** Линейное и целочисленное программирование [Текст] : учеб. пособие / С.И. Шукурьян. – Тверь : Твер. гос. ун-т, 2002. – 104 с.
17. **Кремер, Н.Ш.** Высшая математика для экономических специальностей: Учебник и Практикум (части I и II) [Текст] / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман; под ред. Н.Ш. Кремера. – 2-е изд., перераб. и доп. - М. : Высшее образование, 2007. – 893 с.
18. **Ильин, В.А.** Высшая математика [Текст] : учеб. / В.А. Ильин, А.В. Куркина. - М. : ТК Велби, 2002. – 592 с.
19. Моделирование экономических процессов [Текст] : учеб. для студентов вузов, обучающихся по специальностям экономики и управления (060000) / Под ред. М.В. Грачевой, Л.Н. Фадеевой, Ю.Н. Черемных. - М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. – 351 с.
20. **Реут, В.Б.** Математическая экономика. Ч.1. Графические и математические модели в микроэкономике [Текст] : учеб. пособие / В.Б. Реут. – Тверь : Твер. гос. ун-т, 2000. – 120 с.
21. Экономико-математический энциклопедический словарь [Текст] / Гл. ред. В.И. Данилов-Данильян. – М.: Большая Российская энциклопедия : Издательский Дом “ИНФРА-М”, 2003. – 688 с.
22. **Лотов, А.В.** Введение в экономико-математическое моделирование [Текст] : учеб. пособие / А.В. Лотов; под ред. Н.Н. Моисеева. - М. : Наука, 1984. – 392 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Предметный указатель по теории вероятностей

Предметный указатель по математической статистике

Предметный указатель по экономико-математическим методам

Предметный указатель по экономико-математическим моделям

О

П

Р

С

Т

У

Ф

Э