Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования
Тверской государственный университет

Кафедра автоматизированной обработки
экономической информации и статистики

А.А. Васильев

МАТЕМАТИКА:

ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ И КЛАССИФИКАЦИИ ОСНОВНЫХ РАЗДЕЛОВ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ, ИЗУЧАЕМЫХ СТУДЕНТАМИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

Учебно-справочное пособие

Тверь 2006

Васильев А.А. Математика: Общие понятия и классификации основных разделов прикладной математики, изучаемых студентами экономических специальностей: Учебно-справочное пособие. - Тверь: ТвГУ, 2006. – 104с.

Предметом настоящего учебно-справочного пособия являются только общие понятия и классификации основных разделов прикладной математики, изучаемых студентами экономических специальностей.

Целью данного пособия является: 1) формирование у студентов целостного восприятия изучаемых разделов прикладной математики, их взаимосвязей друг с другом и с общепрофессиональными и специальными экономическими дисциплинами; 2) предоставление преподавателям учебно-справочного пособия, материал которого может быть задан студентам для самостоятельного изучения (это позволит сократить время на изложение этого материала на вводных лекциях и высвободить время для изложения конкретных методов прикладной математики).

Учебно-справочное пособие предназначено для студентов вузов экономических специальностей, преподавателей прикладной математики на экономических факультетах вузов, а также может быть полезным аспирантам и всем, интересующимся вопросами применения прикладной математики в экономике.

Печатается по решению кафедры
автоматизированной обработки
экономической информации и статистики
(протокол № 4 от 13.12.2006 г.)

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ

Основными требованиями к качеству учебных пособий по математике для студентов экономических специальностей относятся (основные из них в общем виде сформулированы, например, в книге Б.В. Гнеденко “Математика и математическое образование в современном мире” (1985)):

1) систематизированное изложение в полном объеме сведений, предусмотренных государственным образовательным стандартом по данной дисциплине для данной специальности;

2) доступность изложения (в частности, основанная на: а) преемственности изложения последовательных разделов, то есть на учете уровня и объема ранее изученного материала, и последовательно изучаемых дисциплин; б) кратком напоминании наиболее важных положений, рассмотренных в ранее изученных математических и экономических дисциплинах и требуемых для изучения данной дисциплины);

3) выработка навыков самостоятельного изучения;

4) рассмотрение структуры изучаемой дисциплины и ее связей с другими математическими и экономическими дисциплинами;

5) четкая формулировка предмета изучения раздела с отнесением к дисциплине (или к научному направлению);

6) изложение кратких исторических сведений о развитии дисциплины и ее разделов;

7) изложение условий, областей практического применения и конкретных реализаций рассматриваемых методов в информационных системах;

8) иллюстрация теоретических положений дисциплины на примерах разной степени сложности из предметной области экономической специальности, достаточных для усвоения теоретического материала.

В большинстве современных учебников по прикладным разделам математики для студентов экономических специальностей 4-7-е требования выполняются далеко не в полной мере. В результате этого обстоятельства нередки случаи непонимания студентами целей изучения математики в целом и ее отдельных разделов, их взаимосвязей друг с другом и с общепрофессиональными и специальными экономическими дисциплинами.

Предметом настоящего учебного пособия являются только общие понятия и классификации основных разделов прикладной математики, изучаемых студентами экономических специальностей. Поэтому в нем не приводятся и не доказываются теоремы, не рассматриваются какие-либо выражения или методы прикладной математики, а также реализующие их вычислительные алгоритмы.

Целью данного учебно-справочного пособия является дополнение учебников и учебных пособий по прикладной математике для экономистов справочными сведениями, позволяющими в той или иной мере выполнить 4-7-е требования к данным учебникам для:

1) формирования у студентов целостного восприятия изучаемых разделов прикладной математики, их взаимосвязей друг с другом и с общепрофессиональными и специальными экономическими дисциплинами;

2) предоставления преподавателям учебно-справочного пособия, материал которого может быть задан студентам для самостоятельного изучения (это позволит сократить время на изложение этого материала на вводных лекциях и высвободить время для изложения конкретных методов прикладной математики).

Учебно-справочное пособие может быть полезно студентам экономических специальностей, преподавателям прикладной математики на экономических факультетах вузов, а также аспирантам и всем, интересующимся вопросами применения прикладной математики в экономике.

ВВЕДЕНИЕ

Математика – наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира.

Математика одна из самых древних наук. Она появилась из насущных нужд человека, когда возникла потребность в количественном отображении окружающего его мира.

Известный российский математик **Андрей Николаевич Колмогоров (1903-1987)** выделял четыре периода развития математики:

1) зарождения математики;
2) элементарной математики;
3) математики переменных величин;
4) современной математики.

<u>Этап зарождения математики</u> как науки продолжался с древних времен примерно **до VI в. до н. э**.

<u>Этап элементарной математики</u> (**примерно VI в. до н. э. - XVII век)** начался примерно в **IV в. до н. э.** с приобретения математикой статуса самостоятельной науки в Древней Греции после накопления достаточно большого фактического материала. Все философские школы того времени включали математику в круг вопросов миросозерцания. <u>В **III в. до н. э.** математика выделилась из философии</u>, что отражено в первом дошедшем до нас теоретическом трактате древнегреческого математика **Евклида (III в. до н. э.)** под названием “Начала”, заложившем фундамент классической геометрии. Эта книга более двух тысяч лет служила руководством по математике.

Много веков после этого математика практически не развивалась, так как до конца XVII - начала XVIII столетия весь арсенал прикладной математики сводился к простейшим правилам арифметики и началам геометрии. В ту пору от делового человека требовалось умение считать, производить взаимные расчеты в коммерческих операциях, приближенно подсчитывать запасы для армии, вычислять длины, площади, объемы.

Вопросы морской навигации требовали еще владения элементами сферической геометрии, которая достаточно широко использовалась и в астрономии. Это почти все потребности в математике общественной практики тех времен. При этом следует отметить, что и сама математика, в сущности, ограничивалась только этими областями знания.

Вместе с тем уже происходит качественное изменение математики как науки. Из **арифметики** (от греч. слова “аритмос” – число) – науки о числах, постепенно вырастает **теория чисел**, изучавшая более глубоко свойства целых положительных чисел. Создается **алгебра** как буквенное исчисление.

В XVII веке запросы естествознания и техники привели к созданию методов, позволяющих математически изучать движение, процессы изменения величин, преобразование геометрических фигур, и к бурному развитию математики.

С употребления переменных величин в аналитической геометрии и создания английским математиком и физиком **Исааком Ньютоном (1643 - 1727)** и немецким математиком и философом **Готфридом Вильгельмом Лейбницем (1646 - 1716) математического анализа**, то есть дифференциального и интегрального исчисления, начался период математики переменных величин.

В этот период на первый план выдвигается понятие **функции**, играющее в дальнейшем такую же роль основного и самостоятельного предмета изучения как ранее понятия величины и числа. Изучение функции привело к основным понятиям математического анализа: **пределу, производной, дифференциалу, интегралу**.

Начинается период разделения математики как единой науки на ряд самостоятельных математических наук: **алгебру, математический анализ, аналитическую геометрию**.

Появляются и формируются новые прикладные математические дисциплины, например **теория вероятностей** и **математическая статистика**.

Дальнейшее развитие математики привело **в начале XIX в.** к возникновению новых математических теорий не только в результате запросов естествознания и техники, но также и внутренней потребности самой математики. Примером такой теории является **"воображаемая геометрия"** русского математика **Николая Ивановича Лобачевского (1792-1856)**. С этого момента начинается период современной математики.

В этот период потребности развития самой математики, проникновение математических методов во многие науки и сферы практической деятельности, называемое **математизацией** знаний, и появление и прогресс вычислительной техники привели к появлению новых математических дисциплин, например, таких как **исследование операций, теория игр, математическая экономика** и других.

Язык математики оказался универсальным, и это есть объективное отражение универсальности законов окружающего нас многообразного мира.

Выдающийся итальянский физик и астроном, один из основателей точного естествознания, **Галилео Галилей (1564 - 1642)** говорил, характеризуя значение и место математики в познании природы: "*Философия написана в грандиозной книге, которая открыта всегда для всех и каждого, я говорю о природе, но понять ее может лишь тот, кто научился понимать ее язык и знаки, которыми она написана. Написана же она на математическом языке, а знаки ее – математические формулы*".

Родоначальник немецкой классической философии **Иммануил Кант (1742 - 1804)** два века назад утверждал, что *"во всякой науке столько истины, сколько в ней математики"*.

Практически уже в наше время немецкий математик **Давид Гильберт (1862 - 1943)** констатировал: *"Математика – основа всего точного естествознания"*.

Экономика как наука об объективных причинах функционирования и развития общества еще со времен **Адама Смита (1723 - 1790)**, английского экономиста, одного из основателей классической политической экономии, пользуется разнообразными количественными характеристиками, а потому вобрала в себя большое число математических методов. Современная экономика наряду с дифференциальным и интегральным исчислением, теорией вероятностей и математической статистикой использует специальные методы оптимизации, составляющие основу математического программирования, теории игр, сетевого планирования, теории массового обслуживания и других прикладных наук.

Специалисты в области экономических исследований считают, что дальнейший прогресс тесно связан с более широким использованием математических методов и моделей. Если раньше доминировал чисто качественный анализ, то теперь уже выявлены количественные закономерности и построены математические модели многих экономических явлений и процессов. Это нашло отражение в государственных образовательных стандартах высшего профессионального образования.

Так, например, в соответствии с государственными образовательными стандартами высшего профессионального образования студенты специальностей 080105 "Финансы и кредит" и 080109 "Бухгалтерский учет, анализ и аудит" в рамках дисциплины "Математика" изучают:

1) общий курс высшей математики (линейную алгебру, аналитическую геометрию, математический анализ, дифференциальные уравнения);

2) теорию вероятностей;

3) математическую статистику;

4) прикладную математику в экономике (экономико-математические методы, экономико-математические модели).

В первоначальном понимании **алгебра** представляла собой раздел математики, изучающий уравнения (причем в настоящее время к области алгебры относят лишь **алгебраические уравнения**, то есть уравнения, каждая из частей которых является одночленом или многочленом по отношению к неизвестным величинам; **одночленом** называется произведение двух или нескольких сомножителей, каждый из которых есть либо число, либо буква, либо степень буквы; **многочлен** – сумма одночленов).

В более широком смысле **алгебра** – это раздел математики, изучающий операции над элементами множества произвольной природы, обобщающие обычные операции сложения и умножения чисел. Существенным признаком алгебры является то обстоятельство, что в ней отсутствует идея предела, идея бесконечной близости элементов, как это имеет место в математическом анализе.

Линейная алгебра – раздел алгебры, изучающий линейные преобразования в конечномерных линейных пространствах. Возникновение линейной алгебры связано с решением систем линейных уравнений, то есть уравнений первой степени относительно переменных (неизвестных). Наиболее развитыми разделами линейной алгебры являются теория матриц и теория форм (в частности, квадратичных).

Аналитическая геометрия – раздел математики, в котором геометрические образы исследуются средствами алгебры на основе применения метода координат.

В элементарной геометрии решение каждой отдельной задачи требует большей или меньшей изобретательности, и часто задачи, весьма схожие друг с другом, требуют совершенно различных приемов решения.

Аналитическая геометрия, созданная в **XVII** веке одновременно двумя французскими учеными – **Рене Декартом (1596 - 1650)** и **Пьером Ферма (1601 - 1655),** дает единообразные приемы решения геометрических задач и сводит решение широкого круга задач к немногим методически применяемым способам. Для достижения этой цели все данные и искомые точки и линии относят к некоторой системе координат. Выбор системы координат позволяет охарактеризовать каждую точку ее координатами, а каждую линию уравнением, графиком которого эта линия является. Этим геометрическая задача сводится к алгебраической задаче, общие методы решения которых хорошо разработаны.

Условно датой рождения аналитической геометрии считается **1637** год, когда было опубликовано одно из приложений философского трактата Р. Декарта "Рассуждение о методе" под названием "Геометрия".

В аналитической геометрии на плоскости решаются три основные задачи:

1) нахождение уравнения линии на основе знания геометрических свойств линии как геометрического места точек;

2) нахождение геометрических свойств линии (построение линии) из уравнения линии;

3) нахождение точек пересечения линий на основе их уравнений.

Сущность метода координат на плоскости заключается в том, что положение всякой точки определяется пересечением двух линий, принадлежащих к двум различным системам координатных линий, которые, образуя координатную сетку, должны удовлетворять требованию: через каждую точку плоскости должна проходить одна и только одна линия каждой системы.

Создание аналитической геометрии, с одной стороны, позволило существенно расширить предмет изучения геометрии, а, с другой стороны, открыло возможность геометрической интерпретации (истолкования и представления) алгебраических и аналитических фактов.

Математический анализ – это общее название ряда разделов математики, основанных на понятиях функции и предела.

К математическому анализу относятся дифференциальное исчисление, интегральное исчисление, теория рядов, теория дифференциальных уравнений, теория аналитических функций, вариационное исчисление, теория интегральных уравнений и функциональный анализ. В более узком смысле термин математический анализ часто используется для общего названия первых трех из указанных разделов математики.

Теория вероятностей – математическая наука, предназначенная для разработки и исследования свойств математических моделей, имитирующих механизмы функционирования реальных явлений или систем, условия существования которых включают в себя неизбежность влияния большого числа случайных (то есть не поддающихся строгому учету и контролю) факторов.

Математическая статистика – система основанных на теоретико-вероятностных моделях понятий, приемов и математических методов, предназначенных для сбора, систематизации, истолкования и обработки статистических данных с целью получения научных и практических выводов.

Экономико-математические методы – условное название комплекса научных дисциплин на стыке экономики с математикой и кибернетикой (наукой, изучающей процессы управления в технических, биологических и социальных системах).

Экономико-математическая модель – математическое описание исследуемого экономического процесса, явления или объекта.

Модель – это материально или мысленно представляемый объект, который в процессе исследования замещает объект-оригинал так, что его непосредственное изучение дает новые знания об объекте оригинале.

Моделирование – способ изучения объекта (процесса, явления) с помощью некоторого его упрощенного представления – модели, а также создание и использование моделей.

Экономико-математические модели – это продукт процесса экономико-математического моделирования, а экономико-математические методы – это инструмент экономико-математического моделирования.

Экономико-математическое моделирование является одним из компонентов в человеко-машинных системах планирования и управления экономическими системами. При этом экономико-математические модели, наряду с информационными и экспертно-логическими системами, представляются в настоящее время неотъемлемыми инструментами теоретической и практической экономики.

1. ПОНЯТИЕ И КЛАССИФИКАЦИЯ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

1.1. Основные понятия принятия решений по управлению социально-экономическими системами

1.1.1. Понятие социально-экономической системы и ее особенности

Система это множество элементов, находящихся во взаимодействиях, отношениях, связях, и благодаря этому представляющее собой целостность.

Сложность системы определяется количеством входящих в нее элементов, связями между этими элементами, а также взаимоотношениями между системой и внешней средой.

Под **экономической системой** понимается любая система, в которой действуют стоимостные или натуральные товарные переменные. В качестве экономической системы может выступать отдельная фирма; техническая или технологическая система, учитывающая стоимость технических средств или продукции; отрасль промышленности; национальная экономика.

Социально-экономической системой называется экономическая система, в которой действуют социальные факторы. В частности, любая макроэкономическая система государства или региона не может не включать социальный фактор и поэтому является социально-экономической.

Социально-экономические системы относятся, как правило, к сложным системам, так как они объединяют огромное число элементов и отличаются многообразием внутренних связей и связей с другими системами (природная среда, экономика других стран и т. д.).

Сложные системы в экономике обладают рядом особенностей, которые необходимо учитывать при управлении ими. К важнейшим из этих особенностей относятся:

1) **эмерджментность**, то есть наличие у экономической системы таких свойств, которые не присущи ни одному из составляющих систему элементов, взятому в отдельности, вне системы (эмерджментность является результатом возникновения между элементами системы так называемых **синергических связей**, которые обеспечивают увеличение общего эффекта до величины большей, чем суммы эффектов элементов системы, действующих независимо; поэтому социально-экономические системы необходимо изучать в целом);

2) **массовый характер** экономических явлений и процессов (закономерности экономических процессов не обнаруживаются на основании небольшого числа наблюдений, поэтому моделирование в экономике должно опираться на массовые наблюдения);

3) **динамичность** экономических процессов, заключающаяся в изменении параметров и структуры экономических систем под влиянием среды (внешних факторов);

4) **случайность и неопределенность** в развитии экономических явлений;

5) **невозможность изолировать** протекающие в экономических системах явления и процессы от окружающей среды, чтобы наблюдать и исследовать их в чистом виде;

6) **активная реакция** на появляющиеся новые факторы, проявляющаяся в способности социально-экономических систем к активным, не всегда предсказуемым действиям в зависимости от отношения системы к этим факторам, способам и методам их воздействия (в частности, такая реакция может состоять в **адаптации** системы, то есть в изменении внутренних параметров в зависимости от внешних воздействий (в экономике это свойст-

во выражается, например, в уменьшении или в увеличении объемов производства в зависимости от налоговой политики государства) или в ее **самоорганизации**, то есть в изменении структуры в зависимости от внешних воздействий).

Перечисленные особенности социально-экономических систем затрудняют управление ими.

1.1.2. Основные понятия управления и теории принятия решений

Управлением называется совокупность управляющих воздействий, направленных на то, чтобы действительный ход процесса соответствовал желаемому. Например, **управление предприятием** представляет собой совокупность воздействий, призванных обеспечить эффективное с точки зрения заданных целей протекание производственного процесса.

Реализация процесса управления предприятием происходит в рамках **системы управления предприятием** – структуры, в которой можно выделить **объект управления** и **управляющую часть**. Объектом управления является производственный процесс. В роли управляющей части на предприятии выступают управленческие службы. Управление предприятием протекает во времени, поэтому его следует рассматривать как процесс управления.

В общем случае **процессом управления** называется целенаправленное воздействие управляющей части на объект управления, ориентированное на достижение определенной цели.

Цель – это желаемый результат действия, функционирования или развития системы.

Оптимальное управление заключается в выборе наилучших управляющих воздействий из множества возможных с учетом ограничений и на основе информации о состоянии управляемого объекта и внешней среды.

Среда (**окружение**, **внешняя среда)** – материальный мир, не включенный исследователем в данную систему.

К основным **функциям управления** относятся:

1) **прогнозирование**, то есть процесс разработки прогнозов (под **прогнозом** понимается научно обоснованное суждение о возможных состояниях объекта в будущем, об альтернативных путях и сроках его существования);

2) **планирование** – 1) момент любой целесообразной деятельности, состоящий в принятии решений об увязке целей с имеющимися ресурсами; 2) деятельность, результат которой обеспечивает согласованный характер использования ресурсов системой и ее элементами в соответствии с определенной общей целью; 3) прикладная наука, изучающая методы увязки целей и ресурсов и механизмов согласования плановой деятельности и вырабатывающая рекомендации по их совершенствованию;

3) **контроль** – определение отклонений между запланированным и фактическим состоянием управляемого объекта в дискретные моменты времени;

4) **регулирование** – обеспечение функционирования управляемых процессов в рамках заданных параметров;

5) **анализ** – подведение итогов осуществления управляемого процесса за период управления и выявление факторов, повлиявших на степень достижения запланированных результатов.

К наиболее сложным функциям управления относятся прогнозирование и планирование, так как наибольшая (**до 30…40%**) доля неудач в условиях рынка объясняется ошибками при планировании, следующей по удельному весу причиной неудач являются ошибки в обработке экономической информации (**25…35%**), далее идут недостатки в информационном обеспечении при постановке задач управления.

Под **решением** в управлении понимается: 1) выбор одной или нескольких альтернатив из множества возможных; 2) процесс осуществления такого выбора.

Альтернатива (франц. alternative, от лат. alter – один из двух) – одна из взаимоисключающих возможностей при выборе.

Решения могут быть:

1) **неэффективными**, то есть неудачными и не позволяющими решить поставленную задачу;

2) **рациональными**, то есть позволяющими решить поставленную задачу;

3) **оптимальными**, то есть позволяющими решить поставленную задачу в определенном смысле наилучшим образом.

Другими словами, **оптимальными** называются решения, по тем или другим признака предпочтительные перед другими.

Более точно, **оптимальное решение** – это выбранное по какому-либо критерию оптимизации наиболее эффективное из всех альтернативных вариантов решение.

Критерий оптимизации – условие, выполнение которого для некоторого объекта означает, что он является оптимальным.

Процесс выбора оптимального решения, который заключается в переборе множества факторов, влияющих на результат, и выборе наилучшего для данной ситуации решения, называется **оптимизацией**.

Выбор оптимального решения основывается на оценке и сопоставлении ожидаемых результатов принятия тех или иных альтернатив с точки зрения целей, поставленных в решаемой задаче.

Для принятия оптимального решения необходимы:

1) четко сформулированная цель;

2) список альтернативных возможностей (**стратегий**, то есть вариантов распределения сил и средств);

3) правило выбора между стратегиями, то есть в общем случае, критерий качества решения;

4) знание факторов, которые могут повлиять на результат при принятии того или иного решения.

1.1.3. Основные методы подготовки принятия решений по управлению социально экономическими системами

Метод – это совокупность приемов или операций практического или теоретического освоения действительности, подчиненных решению конкретной задачи.

К основным методам подготовки принятия решений по управлению социально-экономическими системами относятся:

1) проведение натурного эксперимента с действующей социально-экономической системой;

2) прогнозирование развития социально-экономической системы;

3) математическое моделирование социально-экономической системы.

Проведение натурного эксперимента с действующей социально-экономической системой предполагает проверку предстоящего решения руководителя непосредственно в реальном деле и вполне допустимо в рамках фирмы, предприятия. Такой эксперимент вписывается в теорию маркетинга и представляет собой активное воздействие на рыночную среду с целью получения данных о ее ответной реакции. Применяя разные варианты рыночной или производственной политики в течение небольшого периода времени, предпринимателю удается изучить упомянутую реакцию и понять, какое управленческое решение будет правильным. Конечно, для предпринимателя такой эксперимент принесет временные потери, но эти потери впоследствии могут окупиться.

Если говорить об эксперименте в рамках отрасли, то ее руководитель также может провести его на одном или нескольких предприятиях с тем, чтобы после изучения результатов принять или не принять соответствующее управленческое решение.

Что касается натурного эксперимента в рамках страны или региона, то он может иметь недопустимо высокую цену как в социальном, так и в экономическом смысле, а, кроме того, он тесно связан и с политическими последствиями. Подобные эксперименты проводили во многих странах. Самые впечатляющие из них – это Великая французская революция, Великая Октябрьская социалистическая революция в России, так называемые “культурная революция” и “большой скачок” в Китайской Народной республике, “экономическая реформа” в России в 90-х годах XX века. Несмотря на негативное восприятие подобных экспериментов в целом, отдельные из них возможны на уровне регионов. Например, введение на время оффшорной зоны в одном из регионов, существование определенного региона с отличающимися экономическими отношениями (например, Гонконг в Китае).

Принятие управленческого решения на основе прогнозирования развития социально-экономической системы предполагает накопление и использование данных о развитии социально-экономической системы за некоторый период в ближайшем прошлом. Эти данные представляют собой временные ряды значений экономических переменных (например, валового внутреннего продукта, дефицита бюджета, уровня безработицы и т.п. для макроэкономической системы) в предыдущие моменты времени (годы, месяцы или дни). Имея такие временные ряды, специалисты, владеющие методами прогнозирования, могут определить тенденции их изменения и предсказать возможное развитие социально-экономической системы в будущем. Все это позволяет руководителю принять управленческое решение, исправляющее негативный ход развития, или поддержать наметившуюся положительную тенденцию.

Обязательным условием для применения этого подхода, гарантирующим приемлемую степень достоверности прогноза, является сохранение неизменных условий, в которых развивается система. Если же на период сбора данных временного ряда значений экономических показателей пришлось, например, изменение налоговой политики правительства, а особенно, если подобное изменение пришлось на будущий период, на который делается прогноз, то он будет существенно расходиться с реальным состоянием социально-экономической системы.

Принятие управленческого решения на основе математического моделирования основано на создании математической модели социально-экономической системы и проведении на ней компьютерных экспериментов. В ходе компьютерного эксперимента изучают различные варианты возможных управленческих решений, из которых потом выбирают наилучшие. Такой подход позволяет разработать также целый ряд сценариев развития и принятия управленческих решений в разных условиях и при неодинаковых воздействиях на систему.

Этот подход не затрагивает реальную социально-экономическую систему, как первый из описанных подходов, и не находится в зависимости от условий развития системы, как второй, и поэтому может дать более достоверные сведения о возможном развитии системы в будущем, после принятия решения руководителем. Однако прогноз на основе компьютерного эксперимента будет лишь тогда достоверным, когда разработанная математическая модель достаточно хорошо отражает реальную систему.

Модели могут быть созданы как для отдельных предприятий, независимо от их сферы деятельности, так и для отдельных отраслей хозяйства и даже для экономики государства.

Подход на основе моделирования и проведения компьютерного эксперимента имеет самую низкую себестоимость, так как затраты на него включают лишь затраты на разработку модели и проведение компьютерного эксперимента, что несравнимо с затратами при проведении натурного эксперимента или с потерями из-за неправильного учета условий, в которых применяются методы прогнозирования.

Поэтому основным методом исследования социально-экономических систем и подготовки принятия решений по управлению ими является метод математического моделирования.

1.2. Основные понятия экономико-математического моделирования

1.2.1. Понятие экономико-математического моделирования

Моделирование – способ изучения объекта (процесса, явления) с помощью некоторого его упрощенного представления – модели, а также создание и использование моделей.

Модель (фр. modele, от лат. modulus – мера, образец) – это материально или мысленно представляемый объект, который в процессе исследования замещает объект-оригинал так, что его непосредственное изучение дает новые знания об объекте-оригинале.

То есть модель – это представление объекта, системы или понятия (идеи) в некоторой форме, отличной от формы их реального существования. Модель обычно служит средством, помогающим в объяснении, понимании или совершенствовании системы. Модель какого-либо объекта может быть или точной копией этого объекта (хотя и выполненной из другого материала и в другом масштабе), или отображать некоторые характерные свойства объекта в некоторой абстрактной форме.

Математическая модель – модель, представляющая собой системы математических выражений, описывающих характеристики объекта моделирования и связи между ними.

Экономико-математическая модель – математическое описание исследуемого экономического процесса, явления или объекта.

1.2.2. Основные практические задачи экономико-математического моделирования

Основными практическими задачами экономико-математического моделирования являются:

1) анализ экономических объектов и процессов;
2) прогнозирование развития экономических процессов;
3) выработка управленческих решений на всех уровнях хозяйственной иерархии.

Следует, однако, иметь в виду, что далеко не во всех случаях данные, полученные в результате экономико-математического моделирования, могут использоваться непосредственно как готовые управленческие решения. Они скорее могут рассматриваться как “консультирующие” средства. Принятие управленческих решений остается за человеком.

Таким образом, экономико-математическое моделирование является лишь одним из компонентов в человеко-машинных системах планирования и управления экономическими системами.

При этом экономико-математические модели, наряду с информационными и экспертно-логическими системами, являются в настоящее время неотъемлемыми инструментами теоретической и практической экономики. При этом сама по себе сфера экономико-математических исследований является весьма насыщенной, разнообразной и обширной, требующей знания и активного использования результатов различных разделов экономической теории, математики, системного анализа, теории измерений, хозяйственного права, социологии и статистики.

По сути дела данная сфера относится к фундаментальным основам экономических исследований, и ее развитие – необходимая предпосылка развития экономической науки в целом.

1.2.3. Предпосылки использования модели

Использование модели основано на следующих ее свойствах:

1) способности заменять объект исследования применительно к цели исследования;

2) быть при этом более доступной для изучения с соответствующей стороны, чем моделируемый объект.

Первое свойство обеспечивается сходством модели и объекта моделирования в том, что для цели исследователя существенно, второе – упрощением тех свойств объекта, которые для этой цели несущественны, но затрудняют непосредственное изучение объекта. При этом отношения модели и объекта во всем остальном не имеют значения.

1.2.4. Проблема адекватности модели

Важнейшей характеристикой модели, оправдывающей усилия по ее разработке, является адекватность.

Модель называется **адекватной** объекту исследования относительно данной цели, если она обладает точностью и полнотой, удовлетворяющими поставленной цели, и пригодна для практического использования.

Модель, адекватная объекту относительно какой-либо конкретной цели, может оказаться бесполезной (и, следовательно, неадекватной) для другой цели.

Сходство модели с объектом исследования, который она отображает, характеризуется понятием морфизма и его частными случаями – изоморфизмом и гомоморфизмом.

Морфизм (от греч. morphe – форма) – сходство различных систем в каком-либо структурном соотношении.

Изоморфизм (от греч. isos – равный, одинаковый и morphe – форма) – отношение тождества систем в каком-либо структурном или функциональном аспекте.

Гомоморфизм – отношение подобия систем в каком-либо структурном или функциональном аспекте, обобщение понятия изоморфизм на случай соответствия между системами, однозначного лишь в одну сторону.

Понятия изоморфизма и гомоморфизма возникли в абстрактной алгебре (применительно к алгебраическим системам – группам, кольцам, полям и т. п.), затем стали использоваться в других математических дисциплинах, широко распространились в теории моделей, логике и далее – в кибернетике и общей теории систем. Вне математики и логики эти понятия применяются к системам, определенным содержательно, а не формально, и поэтому теряют математическую строгость.

Для того чтобы быть изоморфной (то есть идентичной или сходной по форме), модель должна удовлетворять двум условиям:

1) должно существовать взаимно однозначное соответствие между элементами модели и элементами объекта исследования;

2) должны быть сохранены точные соотношения или взаимодействия между элементами.

Степень изоморфизма модели относительна, и большинство моделей скорее гомоморфны, чем изоморфны. При этом под **гомоморфизмом модели** понимается сходство по форме при различии основных структур, причем имеет место лишь поверхностное подобие между различными группами элементов модели и объекта. Гомоморфные модели являются результатом процессов упрощения и абстракции.

Следует отметить, что весьма распространенные попытки оценивать адекватность модели объекту исследования безотносительно к цели моделирования методологически несостоятельны: в подобном толковании адекватность возможна только для копии, но не для модели. <u>С позиций заданной цели построенная модель адекватна объекту, если она обеспечивает достижение этой цели</u>.

Проблема адекватности, однако, осложняется тем, что реальные цели бывают, как правило, не вполне определенными и однозначными, корректируются в ходе разработки модели, ее апробации и даже использования. В подобных случаях, типичных для практики, целесообразно оценивать адекватность модели не только относительно цели собственно моделирования, но более широкой – исследования в целом, управленческой проблемы, в рамках которой выделена задача для моделирования, и т. п. В такой трактовке <u>модель можно считать адекватной общей проблеме, если ее решению способствует использование модели в сколько-нибудь существенной степени, и тем более адекватной, чем существеннее эта степень</u>.

1.2.5. Элементы экономико-математической модели

Основными элементами экономико-математической модели являются:

1) критерий оптимальности;
2) целевая функция;
3) входные переменные;
4) выходные переменные;
5) внутренние параметры;
6) ограничения.

Критерий оптимальности – показатель, выбираемый исследователем, имеющий экономический смысл и служащий для формализации конкретной цели управления объектом исследования. Критерий оптимальности определяет смысловое содержание целевой функции. В ряде случаев в качестве критерия оптимальности может использоваться одна из выходных характеристик объекта исследования.

Целевая функция – функция, выражающая критерий оптимальности в математическом виде и представляющая собой математическую зависимость критерия оптимальности от тех или иных факторов объекта исследования. Содержательный смысл целевой функции придает только критерий оптимальности.

Критерий оптимальности и целевая функция являются разными понятиями, и их не следует смешивать. Так, например, критерий прибыли и критерий стоимости произведенной продукции могут описываться одной и той же целевой функцией вида

$$E = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot x_i \quad \to \quad max,$$

где $i = 1, \ldots, n$, - номер вида производимой продукции;

n - количество видов производимой продукции;

x_i - объем выпуска продукции i-го вида;

c_i - прибыль от реализации единицы продукции i-го вида или стоимость единицы продукции i-го вида в зависимости от смысла критерия оптимальности.

При наличии нескольких критериев оптимальности каждый из них формализуется своей частной целевой функцией E_k, где $k = 1, \ldots, K$, K - число критериев оптимальности. Для однозначного выбора оптимального решения исследователь, как правило, формирует обобщенную целевую функцию вида

$$E = f\left(E_1, E_2, \dots, E_k, \dots, E_K\right) \rightarrow extr.$$

Такая целевая функция может уже не иметь экономического смысла. В этом случае критерий оптимальности для нее отсутствует.

Входные переменные (например, используемые ресурсы, вкладываемый в дело капитал и т. д.) – это переменные, задаваемые вне модели и характеризующие среду функционирования моделируемого объекта. Входные переменные называются также **входными факторами** или **экзогенными переменными**. Входные переменные условно считаются не зависящими от неизвестных модели и при однократном проведении расчетов, как правило, задаются как константы.

Входные переменные подразделяются на:

а) независимые;

б) управляющие;

в) возмущающие.

Независимые переменные – это такие переменные, которые не могут быть изменены при моделировании экспериментатором, а в реальности – руководителем экономической системы (например, ресурсы страны).

Управляющие переменные (**переменные управления**) – такие переменные, которые могут быть изменены исследователем. Фактически это те переменные, по которым руководитель системы должен принимать управленческое решение (например, в макроэкономике – ставки налогов или учетная ставка центрального банка, а в микроэкономике – количество работников на предприятии, инвестиции в производство и др.).

Возмущающие переменные – это факторы, имеющие, в общем, случайный характер, но имеющие место в реальной жизни. К ним можно отнести колебания климата, изменение моды и пристрастий потребителей, аварийные ситуации и другие факторы. Возмущающие переменные являются входными по отношению к объекту исследования, но не участвуют непосредственно в товарно-денежных отношениях или производстве, а вносят помехи нормальному течению дел.

Выходные переменные (**характеристики**) – это переменные, изучение которых необходимо для описания состояния экономической системы. Эти переменные являются интересующими исследователя непосредственными результатами функционирования объекта. Выходные переменные называются также **состояниями системы** или **эндогенными переменными**, то есть такими переменными, которые определяются в ходе расчетов по модели и не задаются в ней извне. Примерами эндогенных переменных являются объемы производства продукции, объемы продаж, прибыль.

Внутренние параметры модели (**системы**) – это различные показатели входящих в систему элементов, например, производительность, материалоемкость, нормы времени и др.

Ограничения определяют пределы, сужающие область осуществимых, приемлемых или допустимых решений и фиксирующие основные внешние и внутренние свойства объекта исследования. Ограничения определяют область протекания исследуемого процесса, пределы изменения входных и выходных переменных, а также внутренних параметров системы.

1.2.6. Основные этапы экономико-математического моделирования

Нахождение оптимальных решений по управлению социально-экономическими системами с использованием экономико-математического моделирования включает следующие основные этапы:

1) качественная постановка задачи экономического исследования;

2) построение экономико-математической модели задачи экономического исследования;

3) разработка алгоритма (конечного числа последовательно и однозначно выполняемых предписаний, позволяющих получить решение задачи при заданных исходных данных) численного решения экономико-математической модели одним из множества экономико-математических методов;

4) численное нахождение оптимального решения экономико-математической модели;

5) верификация экономико-математической модели;

6) анализ оптимального решения на устойчивость и чувствительность к возможным изменениям параметров исследуемой экономической системы;

7) применение полученных результатов на практике.

Качественная постановка задачи экономического исследования заключается в словесном изложении сути задачи с указанием всех известных и неизвестных входных и выходных переменных, внутренних параметров и ограничений исследуемого экономического объекта или процесса, а также цели (целей) решения.

Построение экономико-математической модели задачи экономического исследования состоит в формализации качественной постановки задачи, то есть в выражении ее в виде конкретных математических зависимостей (функций, уравнений, неравенств и др.). Построение модели подразделяется в свою очередь на несколько стадий: определение типа экономико-математической модели; изучение возможности ее применения в данной задаче; уточнение конкретного перечня переменных, параметров и формы связей. При этом целесообразно построить модель, относящуюся к хорошо изученному классу математических задач, что может потребовать некоторого упрощения исходных предпосылок модели, не искажающего основных черт моделируемого объекта. Однако возможна и такая ситуация, когда формализация задачи приводит к неизвестной ранее математической структуре.

Численное нахождение оптимального решения экономико-математической модели включает:

а) разработку и отладку компьютерной программы реализации алгоритма численного решения экономико-математической модели или выбор готовой программы;

б) непосредственное нахождение оптимального решения на компьютере.

Верификация экономико-математической модели (от лат. verus – истинный и facere – делать) – проверка модели, соотнесение ее с действительностью, выяснение соответствия реальным данным и содержательным представлениям об объекте и цели моделирования. Говорить о верификации модели можно лишь в том случае, если сама форма модели, структура и вид содержащихся в ней зависимостей получены из некоторых общих теоретических представлений. Именно в этом случае возникает проблема соотнесения общей модели с конкретными обстоятельствами. Последние не сводятся к учету индивидуальных особенностей реального объекта, не зависят от цели, для достижения которой предполагается воспользоваться моделью. Поэтому можно рассматривать как формальную, так и содержательную верификацию модели.

Формальная верификация модели – выяснение адекватности модели реальному объекту, то есть точности представления ею данных наблюдений в соответствии с целью моделирования. Методы решения подобных задач разрабатываются в эконометрике. Формальная верификация модели также называется **валидацией модели**, под которой понимается проверка соответствия данных, полученных на основе модели, реальному процессу.

Содержательная верификация модели – выяснение адекватности модели той конкретной задаче, для решения которой она применяется. При этом основное внимание уделяется анализу содержательной постановки задачи, способов и средств ее формализации и истолкованию результатов, полученных с помощью модели. Содержательная верификация модели иногда называется просто верификацией модели, под которой понимается проверка правильности структуры (логики) модели.

Анализ оптимального решения на устойчивость и чувствительность к возможным изменениям параметров исследуемой экономической системы предполагает исследование устойчивости и чувствительности модели.

Устойчивость – стабильность, способность системы, обладающей достаточно сложным поведением, сохранять некоторые свойства и характеристики неизменными; одно из основных понятий кибернетики и общей теории систем. Если система обладает свойством устойчивости, то некоторые высказывания о ней будут постоянно истинными, несмотря на ее изменения.

Анализ чувствительности – исследование зависимости решения задачи от изменений исходных данных. <u>Цель анализа чувствительности</u> – убедиться в том, что задача **корректна**, то есть малые изменения исходных данных (как минимум, в пределах погрешности их измерения) не приводят к значительным изменениям решения.

Таким образом, <u>экономико-математические модели – это продукт процесса экономико-математического моделирования, а экономико-математические методы – это инструмент экономико-математического моделирования</u>.

1.3. Понятие экономико-математических методов

В общем случае процессы управления в технических, биологических и социальных системах изучает научное направление, называемое **кибернетикой** (от греч. “искусство управления”, “правлю рулем”).

Это направление сформировалось в США в **конце 1930-х – начале 1940-х гг.** как область знаний, объединявшая и обобщающая:

1) **теорию регулирования** (**регулирование** – специальный случай управления, когда оно сводится к обеспечению требуемых значений переменных, существенных для функционирования объекта управления, при изменении внешней среды техническими системами с обратной связью; **обратная связь в кибернетике** – вид соединения элементов, при котором связь между выходом какого-либо элемента и входом того же самого элемента осуществляется непосредственно или через другие элементы системы; принцип обратной связи универсален, он лежит в основе функционирования автоматически регулируемых систем и схем усиления в природе, технике, экономике и других областях);

2) **теорию информации** (раздел математики, исследующий процессы хранения, преобразования и передачи информации; теория информации – существенная часть кибернетики; в основе теории информации лежит определенный способ измерения количества информации, содержащейся в каких-либо данных);

3) в определенной степени разработки по **теории автоматов** (**автомат** в кибернетике – математическая модель устройства, преобразующего дискретную информацию; к таким устройствам могут быть отнесены компьютеры и их отдельные части, технические автоматы, живые организмы, экономические системы и т.д.) и другим математическим дисциплинам с целью создания компьютеров.

Первым, кто употребил термин “кибернетика” для обозначения управления в общем смысле, был, по-видимому, древнегреческий философ **Платон (428** или **427 г. до н. э. – 348** или **347 г. до н. э.)**.

В **1834** году французский физик и математик **Андре Мари Ампер (1775 - 1836)** предложил назвать кибернетикой науку об управлении человеческим обществом.

В современном смысле термин “кибернетика” введен американским математиком **Норбертом Винером (1894 - 1964)** в **1944** году в его книге “Кибернетика, или управление и связь в животном и машине”.

Основная идея Винера состояла в том, что процессы управления, в каких бы системах они ни осуществлялись, имеют общие черты (обмен информацией, обратную связь и др.) и поэтому должны быть объектом изучения специальной научной дисциплины – кибернетики.

На дальнейшее становление кибернетики огромное влияние оказали электронные вычислительные машины. К **началу 70-х годов XX века** кибернетика окончательно оформилась как наука физико-математического профиля с собственным предметом исследования – так называемыми кибернетическими системами.

Кибернетическая система (система управления, система регулирования) – это абстракция под определенным (информационным) углом зрения сложной системы, которая изучается широким спектром естественных, технических и социальных наук (под своими специфическими углами зрения).

Кибернетическая система характеризуется тем, что в ней реализуется функция управления; соответственно в кибернетической системе выделяются две подсистемы: **управляющая**, которая выполняет указанную функцию, и **управляемая** (объект управления), в отношении которой эта функция осуществляется. Между управляющей и управляемой подсистемами кибернетической системы имеются информационные каналы прямой и обратной связи. По каналу прямой связи из управляющей подсистемы передается сигнал управления, назначение которого – воздействовать на объект управления в соответствии с целью управляющей подсистемы (цель при этом может быть: 1) осознанной – в случае участия человека как активного элемента кибернетической системы, 2) заданной извне – в автоматически действующих технических устройствах или 3) обуславливаться задачей выживания – в биологических системах). По каналу обратной связи от объекта управления передается информация о его состоянии в управляющую подсистему.

Выявляя общие аспекты в системах различной природы, кибернетика вместе с тем дает и притом принципиально новый метод их изучения – имитационное моделирование.

Слово “**имитация**” (от лат. imitation- подражание) означает воспроизведение определенным образом явлений, событий, действий, объектов и т. п.

Имитационное моделирование – метод познания действительности в процессе конструирования имитационных моделей и проведения с ними лабораторных экспериментов.

Имитационная модель – математическая (преимущественно компьютерная) модель, исследование которой проводится экспериментальными методами. Термин введен в **начале 1960-х годов**, его границы довольно широки и не слишком четко определены.

При имитационном моделировании реализующий модель алгоритм воспроизводит процесс функционирования системы во времени, причем имитируются составляющие процесс элементарные явления с сохранением его логической и временной структуры.

По существу имитационные модели являются простым переложением на машинный (компьютерный) язык описаний моделируемых систем. Специальные программы, обслуживающие модель, генерируют различные конкретные реализации входных переменных моделируемой системы и формируют в соответствии с введенным в компьютер описанием системы (включая ее начальные состояния) значения выходных переменных. Далее, как и в обычном (натурном) эксперименте, полученные результаты обрабатываются.

Метод имитационного моделирования (называемый также **методом машинного эксперимента**) является промежуточным между классическим дедуктивным (**дедукция** – метод доказательства, позволяющий выводить новое утверждение из некоторых исходных утверждений, при этом на основании общих знаний делается вывод для конкретного частного случая; в настоящее время дедукцией, или дедуктивным методом доказательства, называется доказательство, основанное на системе определенных аксиом, поэтому дедуктивный метод называется также аксиоматическим методом) и классическим экспериментальным методами. Благодаря этому кибернетику, подобно математике, можно использовать в качестве аппарата исследования в других науках. Причем спектр проблем, доступных исследованию кибернетическими методами, по сравнению с классическими (аналитическими) математическими методами значительно шире и охватывает практически все науки.

Поэтому кибернетика оказала сильное стимулирующее влияние на развитие техники и многих научных направлений и дисциплин, в том числе и общественных наук – экономики, социологии.

В настоящее время под **кибернетикой** понимается наука о законах структурной организации и функционирования систем управления любой материальной природы и степени сложности, имеющая своей целью анализ, синтез и оптимизацию таких систем.

Структурой (от лат. structura – строение, расположение, порядок, взаимосвязь составных частей) называется относительно постоянный порядок внутренних пространственно-временных связей системы между ее элементами и взаимодействия их с внешней средой, определяющий функциональное назначение системы.

Анализ – этап познавательного процесса, представляющий собой процедуру мысленного, а также часто и реального разделения изучаемого явления (объекта) на части и отдельного изучения каждой части единого целого.

Синтез – этап познавательного процесса, заключающийся в соединении всех изученных составных частей явления в единое целое в соответствии с тем значением и положением, которые они имеют в общей структуре явления.

Кибернетика принимает сложность и общность взаимосвязей процессов и явлений как неотъемлемую черту исследуемых объектов и рассматривает поведение систем во взаимодействии с другими системами, составляющими их среду.

При исследовании объектов, явлений и процессов кибернетика использует уже рассмотренные понятия системы, цели, модели, управления, среды, обратной связи, а также понятие “черный ящик” и другие понятия.

Черный ящик – тип кибернетической модели, которой используется в случаях, когда нет сведений о внутренней организации и поведении элементов моделируемой системы, но имеется возможность влиять на систему в целом через ее входы и регистрировать информацию с выходов.

Методы и идеи кибернетики нашли широкое применение в исследовании процессов управления в экономике. Это направление исследований выделилось к **концу 1950-х гг.** в самостоятельную научную дисциплину, называемую экономической кибернетикой.

Экономическая кибернетика – система теоретических положений, объясняющих происходящие в национальном хозяйстве процессы с позиций организационных и информационных изменений в его структурах, используя в качестве методологической основы понятия и концепции теории автоматического регулирования, теории информации, кибернетики, информатики и других смежных дисциплин.

Теория информации – раздел математики, являющийся существенной частью кибернетики и исследующий процессы хранения, преобразования и передачи информации.

Информатика – 1) наука, изучающая информационные процессы и системы в социальной среде, их роль, методы построения, механизм воздействия на человеческую практику, усиление этого воздействия с помощью вычислительной техники и средств связи (возникла как дополнение и конкретизация теории информации из потребностей автоматизации социально-коммуникационных процессов; информатика начала формироваться в **1970-е гг.** как научная база использования электронных вычислительных машин в управлении, науке, проектировании, образовании, сфере услуг и т. д.); 2) научно-техническое направление – группа дисциплин, занимающихся различными аспектами применения и разработки компьютеров: прикладная математика, программирование, программное обеспечение, искусственный интеллект, архитектура компьютеров, вычислительные сети.

Говоря проще, **экономическая кибернетика** – научное направление, занимающееся приложением идей и методов кибернетики к экономическим системам. Экономическая кибернетика рассматривает экономику, а также ее структурные и функциональные звенья, как системы, в которых протекают процессы регулирования и управления, реализуемые движением и преобразованием информации.

<u>При широком понимании термина</u> в **экономическую кибернетику** включают весь комплекс дисциплин и научных направлений, трактующих вопросы применения математических методов и электронной вычислительной техники в экономике, управлении организационными системами, для систематизации экономических данных, их обработки и принятия ор-

ганизационных и хозяйственных решений. Другими словами, **экономическая кибернетика** – это собирательное понятие, охватывающее весь комплекс научных дисциплин, возникших на стыке математики и кибернетики с экономикой. В отечественной литературе обычно этот комплекс научных дисциплин определяется как экономико-математические методы, к которым относят и экономическую кибернетику.

Таким образом, **экономико-математические методы** – это условное название комплекса научных дисциплин на стыке экономики с математикой и кибернетикой, впервые (в этом смысле) введенное одним из основоположников экономико-математического направления отечественной экономической науки **Василием Сергеевичем Немчиновым (1894 - 1964)** в **начале 1960-х гг.** и широко применяемое в России.

1.4. Классификация и предмет экономико-математических методов

1.4.1. Классификация экономико-математических методов

Классификация экономико-математических методов сводится к классификации научных дисциплин, входящих в их состав. Она представлена на рис. 1.

1.4.2. Предмет математической статистики, математической экономики и эконометрики

Математическая статистика – система основанных на теоретико-вероятностных моделях понятий, приемов и математических методов, предназначенных для сбора, систематизации, истолкования и обработки статистических данных с целью получения научных и практических выводов. Одно из главных назначений методов математической статистики –

Рис. 1. **Классификация экономико-математических методов**

обоснованный выбор среди возможных теоретико-вероятностных моделей той модели, которая наилучшим образом соответствует имеющимся в распоряжении исследователя статистическим данным, характеризующим реальное поведение конкретной исследуемой системы.

Правила и процедуры математической статистики опираются на теорию вероятностей, позволяющую оценить точность и надежность выводов, получаемых в каждой задаче на основании имеющегося статистического материала. **Статистическими данными** называются сведения о числе объектов в какой-либо более или менее обширной совокупности, обладающих теми или иными признаками.

Математическая статистика изучается в разделе “Теория вероятностей и математическая статистика” дисциплины “Математика” из цикла общих математических и естественнонаучных дисциплин.

Математическая экономика – совокупность научных направлений, развивающих экономическую теорию на основе аксиоматического метода: постулаты формализуются в виде математических соотношений, а получаемые модельные конструкции и их обобщения изучаются математическими средствами. Таким образом, **математическая экономика** - раздел экономической науки, занимающийся анализом свойств и решений математических моделей экономических процессов.

В математической экономике исследуются теоретические модели, основанные на определенных формальных предпосылках (линейность, выпуклость, монотонность зависимости и т. п.), а также на конкретных формулах взаимосвязи величин. Математическая экономика, вообще говоря, не занимается изучением степени обоснованности того, что данная зависимость имеет тот или иной вид. Это оставляется для эконометрики. Задачей математической экономики является изучение вопроса о существовании решения экономико-математической модели, условиях его неотрицательности, стационарности, наличия других свойств.

Элементы математической экономики изучаются в разделе “Экономико-математические модели” дисциплины “Математика”.

Эконометрика – наука, исследующая количественные закономерности и взаимосвязи в экономике при помощи методов математической статистики и позволяющая на базе положений экономической теории и результатов экономических измерений придавать конкретное количественное выражение общим (качественным) закономерностям, обусловленным экономической теорией.

Математическая экономика и эконометрика изучают одни и те же вопросы. Однако, в отличие от математической экономики, эконометрика занимается статистической оценкой и анализом экономических зависимостей и моделей на основе изучения эмпирических данных.

Эконометрика изучается в рамках самостоятельной одноименной дисциплины из цикла общих математических и естественнонаучных дисциплин.

1.4.3. Предмет аналитических методов принятия оптимальных решений

Математическое программирование – область математики, разрабатывающая теорию и численные методы решения многомерных экстремальных задач с ограничениями, то есть задач на экстремум функции многих переменных с ограничениями на область изменения этих переменных. В отличие от классической теории экстремальных задач, которая является частью математического программирования, основное внимание уделяется тем задачам, в которых имеются ограничения на область изменения этих переменных.

Линейное программирование – область математики, разрабатывающая теорию и численные методы нахождения экстремума (максимума или минимума) линейной функции многих переменных при наличии линейных ограничений, то есть линейных равенств или неравенств, связывающих эти переменные. К задачам линейного программирования сводится широкий спектр задач планирования экономических и технико-экономических процессов, где отыскивается наилучшее (оптимальное) решение.

Возникновение и развитие линейного программирования непосредственно связано с экономической проблематикой. Термин "линейное программирование" появился в работах американских ученых **Дж. Б. Данцига** и **Т. Купманса**. Слово **программирование** выбрано потому, что набор переменных, подлежащих нахождению, обычно определяет программу (план) работы некоторого экономического объекта.

Первые исследования по линейному программированию (основные задачи и приложения, критерии оптимальности, геометрическое истолкование методов нахождения оптимального решения, экономическая трактовка результатов математического анализа) были проведены в **1930-е** годы в Ленинградском университете российским математиком **Леонидом Витальевичем Канторовичем (1912 - 1986)**, удостоенным в 1975 году Нобелевской премии "За вклад в теорию оптимального распределения ресурсов" совместно с **Т. Купмансом (1910 - 1985)**.

Наиболее интенсивно линейное программирование развивалось в **1955 - 65 гг.** в СССР и США, когда оно было одним из наиболее "модных" разделов прикладной математики.

Нелинейное программирование – раздел математического программирования, изучающий задачи отыскания глобального максимума (минимума) фиксированной (целевой) функции при наличии ограничений в ситуации, когда целевая функция и ограничения имеют достаточно общий характер. При этом в отличие от линейного программирования фигурирующие в задачах функции не предполагаются линейными.

Динамическое программирование – область математики, разрабатывающая теорию и численные методы нахождения оптимальных по некоторой целевой функции многошаговых управлений. Динамическое программирование является частью математического программирования, характеризующейся своеобразными методами и постановками задач, в которых существенно используется динамическое, то есть последовательное и постепенное, принятие решений.

В задачах динамического программирования процесс поиска оптимального решения может быть разделен на отдельные этапы (шаги). Разделение процесса поиска решения на этапы позволяет свести одну сложную задачу со многими переменными ко многим небольшим и менее сложным задачам с малым числом переменных.

Нахождение решения конкретных задач методами динамического программирования включает несколько этапов (шагов), на каждом из которых определяется решение некоторой частной задачи, обусловленной исходной. Поэтому термин “динамическое программирование” не столько определяет особый тип задач, сколько характеризует методы нахождения решения отдельных классов задач математического программирования, которые могут относиться к задачам как линейного, так и нелинейного программирования.

Основным методом динамического программирования является разработанный американским математиком **Ричардом Беллманом (1920 - 1984)** в 1953 году **метод рекуррентных соотношений**, в основе которого лежит следующий принцип оптимальности: каковы бы ни были начальное состояние управляемого процесса и управление, выбранное на этом шаге, последующие управления должны выбираться оптимальными относительно состояния, к которому придет система в конце данного шага. Использование данного принципа гарантирует, что управление, выбранное на любом шаге, будет оптимальным с точки зрения всего многошагового процесса в целом, а не локально оптимальным с точки зрения данного шага.

Этот принцип (справедливый не для всех задач, а лишь для задач с определенной структурой зависимости управлений на различных шагах процесса и для целевых функций специального вида – так называемых аддитивных функционалов от траектории) позволяет установить соотношение между экстремальными значениями целевой функции в задачах с различной продолжительностью процесса и различными начальными состояниями.

Динамическое программирование с непрерывным временем обычно рассматривается как предельный вариант дискретной схемы и дает результаты, близкие к тем, которые могут быть получены из математической теории оптимальных процессов российского математика **Льва Семеновича Понтрягина (1908 - 1988)** и его последователей.

Математическая теория оптимальных процессов – дисциплина, рассматривающая математические задачи автоматического регулирования, прежде всего в технических системах (таких, например, как ракета). В настоящее время эту теорию активно применяют в управлении экономическими процессами, в частности при теоретическом анализе процессов перспективного развития.

Математическая теория оптимальных процессов изучает процессы, описываемые дифференциальными уравнениями с управляющими переменными. Задача состоит в том, чтобы найти такое управление, при котором соответствующее ему решение минимизирует или максимизирует заданный функционал. Главный результат теории – всемирно известный “**принцип максимума**”, полученный в **1956 - 61 гг.** и сформулированный следующим образом: для многих управляемых систем может быть построен такой процесс регулирования, при котором само состояние системы в каждый данный момент подсказывает наилучший с точки зрения всего процесса способ действий.

Дискетное программирование (**дискретная оптимизация, комбинаторная оптимизация**) – часть математического программирования, в которой исследуются и решаются экстремальные задачи на целочисленных решетках и конечных множествах.

Частным случаем дискретного программирования является **целочисленное программирование** – раздел математического программирования, занимающийся исследованием задач, в которых на значения некоторых или всех переменных наложено требование целочисленности.

К некоторым источникам возникновения дискретности и целочисленности в оптимизационных задачах относятся:

1) физическая неделимость (например, нельзя закупить 2,4 корабля или построить 1,7 установки для производства полиэтилена);

2) наличие альтернатив (например, если рассматривается вопрос о строительстве завода в некотором пункте, и подготовлено несколько возможных вариантов проекта строительства, то может быть реализован ровно один вариант).

Параметрическое программирование – раздел математического программирования, в котором рассматриваются экстремальные задачи с целевыми функциями и ограничениями, зависящими от параметров, разрабатываются численные методы, позволяющие находить решения сразу для совокупности значений параметров, и изучается поведение решения этих задач при изменении параметров.

Сепарабельное программирование – раздел математического программирования, изучающий задачи нелинейного программирования, в которых целевая функция и ограничения задаются **сепарабельными функциями**, то есть функциями, представимыми в виде сумм функций, каждая из которых зависит только от одной действительной переменной.

Стохастическая оптимизация (**программирование**) – раздел теории оптимизации, в котором изучаются условно-экстремальные задачи, целевая функция которых и/или ограничения имеют вероятностный смысл.

Термин “стохастическая оптимизация” произошел от термина “стохастическое программирование”, введенного в **1950-х гг.** американскими математиками **Дж. Данцигом** и **А. Мадански**. Они сформулировали известную двухэтапную задачу стохастического программирования, которую рассматривали как естественное обобщение задачи линейного программирования. Двухэтапная задача формализует схему принятия решений, которую условно можно представить в виде цепочки: решение – наблюдение – решение.

Дробно-линейное программирование – раздел математического программирования, исследующий экстремальные задачи с **дробно-линейной** целевой функцией, которая представляет собой отношение двух линейных функций, и с линейными ограничениями.

Геометрическое программирование – теория и методы решения нелинейных оптимизационных задач, в которых целевая функция и ограничения представляют собой обобщенные полиномы. **Обобщенным полиномом** или **сигномом** называется полином вида

$$g\left(x_1, \dots, x_n\right) = \sum_k c_k \cdot x_1^{a_{k1}} \times \dots \times x_n^{a_{kn}},$$

рассматриваемый в положительной области и в котором в качестве показателей степеней переменных допускаются любые действительные числа. Сигном с положительным коэффициентом c_k называется **позиномом**.

В соответствии с государственными образовательными стандартами высшего профессионального образования студенты, обучающиеся по специальностям 080105 “Финансы и кредит” и 080109 “Бухгалтерский учет”, анализ и аудит”, изучают в разделе “Экономико-математические методы” дисциплины “Математика” следующие элементы математического программирования: линейное, целочисленное и динамическое программирование, а также элементы математической теории оптимальных процессов.

Сетевое планирование и управление – совокупность методов планирования и управления разработкой крупных хозяйственных комплексов, научными исследованиями, конструкторской и технологической подготовки производства, новых видов изделий, строительством и реконструкцией, капитальным ремонтом основных фондов, основанных на использовании сетевых моделей.

Сетевая модель представляет собой план выполнения некоторого комплекса взаимосвязанных работ, заданного в специфической форме сети, графическое изображение которой называется **сетевым графиком**. Сетевая модель позволяет определить ближайший возможный срок завершения проекта, выяснить, затягивание каких действий против ожидаемой продолжительности отодвинет его, и оценить резервы прироста предполагаемой длительности других процедур, ограничивающих маневр ресурсами, для страховки установленного срока реализации проекта или его ускорения.

Сетевая модель – эффективный инструмент разработки календарных графиков с опорой на оптимальное распределение имеющихся ресурсов (либо сводящее к минимуму потребности в них при своевременном осуществлении проекта, либо приближающее эту дату настолько, насколько допускают их наличные объемы), контроля за выполнением таких графиков и поиска наилучших путей компенсации возникающих отклонений.

Сетевая модель впервые применена в **1959 г.** в США как основа метода обзора и оценки программ, связанных с ракетно-космическим проектом “Поларис”. В России сетевые модели используются с **начала 1960-х гг.**

Программно-целевой метод (комплексная программа, целевая комплексная программа) – способ координации действий относительно независимых организаций для достижения единой цели или решения сложной задачи, требующей их совместного согласованного взаимодействия. Комплексные программы принято подразделять на два основных класса: плановые и управленческие.

Плановые комплексные программы представляют собой либо добровольно заключенный договор между организациями, распределяющий между ними задачи и получаемые результаты так, что это выгодно участникам, либо предписываемый собственником всех этих организаций план исполнения распределенных между ними "сверху" заданий.

Управленческие комплексные программы включают (вместе с соответствующим договором или планом) также и внутренний орган управления осуществлением этого договора или плана, располагающий необходимыми для этого правами и ресурсами.

Комплексные программы формируются обычно на определенный ограниченный срок, требуемый для решения целевой задачи.

Процессы разработки комплексных программ часто называют прикладным системным анализом экономических, социальных, научно-технических и т. п. проблем.

Системный анализ – совокупность приемов решения проблем в целенаправленной деятельности в условиях неопределенности на основе системного подхода. Понятие системный анализ было применено в RAND Corporation (США) в **1960-е гг.** для описания широкого спектра систем военного, космического, промышленного, транспортного и административного назначения при проектировании портов, школ, госпиталей, городского транспорта и решения проблем федеральной, региональной и местной администрации.

Системный анализ начинается с интуитивной и лишь в общих чертах сформулированной постановки проблемы и заканчивается выбором решений, оптимизированных с помощью строгих математических методов, и имеет целью уменьшение (преодоление) неопределенности слабо структурированной проблемы.

Системный подход – это методология специального научного познания и социальной практики, а также объяснительный принцип, в основе которого лежит исследование объектов как систем.

Этот подход отличается от традиционного, предусматривающего расчленение изучаемого объекта на составные части и определение поведения сложного объекта как результата объединения свойств входящих в него систем.

Особенности системного подхода определяются тем, что он ориентирует исследователя на:

1) раскрытие целостности объекта и обеспечивающих ее механизмов;
2) выявление многообразных типов связей сложного объекта;
3) сведение этих связей в единую теоретическую картину.

Системный подход реализует представление сложного объекта в виде иерархической системы взаимосвязанных моделей, позволяющих фиксировать целостные свойства объекта, его структуру и динамику.

Системный подход основывается на **принципе целостности объекта исследования**, то есть на исследовании его свойств как единого целого, единой системы. Этот принцип исходит из того, что целое обладает такими качествами, которыми не обладает ни одна из его частей (свойство эмерджментности).

Таким образом, **системный подход** – это методология исследования объекта и построения его математической модели, когда объект рассматривается как целостный комплекс взаимосвязанных компонентов, имеющий особое единство с внешней средой и представляющий собой подсистему системы более высокого порядка. Единство системы с внешней средой определяет ее взаимосвязь с действием объективных экономических законов.

Теория массового обслуживания (теория очередей) – прикладная область теории случайных процессов, предметом исследования которой являются вероятностные модели реальных систем обслуживания, в которых в случайные (или не в случайные) моменты времени возникают заявки на обслуживание и имеются устройства для обслуживания этих заявок.

Системой массового обслуживания – называется система обслуживания, предназначенная для многоразового использования при решении однотипных задач. Примерами таких систем являются телефонные системы, ремонтные мастерские, вычислительные комплексы, билетные кассы, магазины, парикмахерские и т. п.

Управление запасами – совокупность хозяйственных решений, определяющих последовательность действий по созданию или восстановлению резервов разного рода ресурсов (товарно-материальных ценностей, производственных и транспортных мощностей, складских емкостей и т. д.), а также моменты отдачи распоряжений о пополнении запасов и их масштабах.

Управление запасами заключается в установлении моментов и объемов заказа на восполнение их и распределении вновь прибывшей партии по нижестоящим звеньям системы снабжения. Совокупность правил, по которым принимаются эти решения, называется **стратегией управления запасами**. Каждая такая стратегия связана с определенными затратами по доведению материальных средств до потребителей. **Оптимальной стратегией управления запасами** называется такая стратегия, которая минимизирует эти затраты.

Теория игр – раздел математики, содержание которого состоит в исследовании математических моделей явлений и процессов многостороннего принятия решений, где каждая сторона руководствуется собственными интересами и (или) принимает свои решения в условиях неопределенности (хотя бы частичной) о решениях, выбираемых другими сторонами.

Теория принятия решений – междисциплинарное прикладное научное направление, которое изучает особый процесс человеческой деятельности, направленный на выбор наилучшего варианта действий.

Теория расписаний – система качественных и численных методов временной увязки и упорядочения действий, направленных на достижение заданной цели при соблюдении некоторых технологических ограничений. К теории расписаний относят задачи календарного планирования производства, транспорта, обучения, военных операций, информационно-вычислительных процессов и др.

В соответствии с государственными образовательными стандартами высшего профессионального образования студенты, обучающиеся по специальностям 080105 “Финансы и кредит” и 080109 “Бухгалтерский учет”, анализ и аудит”, изучают в разделе “Экономико-математические методы” дисциплины “Математика” следующие аналитические методы принятия оптимальных решений: сетевое планирование и управление, теорию игр и теорию массового обслуживания.

1.4.4. Предмет экспериментальных методов принятия решений

Планирование эксперимента – раздел математической статистики, изучающий рациональное управление измерениями, подверженными случайным ошибкам. При использовании планирования эксперимента анализ измерений и его истолкование существенно упрощаются, значительно повышается точность и надежность выводов при тех же экспериментальных затратах за счет большей информативности измерений.

Имитационное моделирование экономических процессов – разновидность экономико-математического моделирования, представляющая собой метод познания экономической действительности в процессе конструирования имитационных моделей и проведения с ними лабораторных экономических экспериментов.

Имитационная модель экономического процесса – экономико-математическая (преимущественно компьютерная) модель, исследование которой проводится экспериментальными методами.

Деловая игра (**имитационная управленческая игра**) – игра, моделирующая взаимодействие участников системы управления определенным экономическим объектом.

В деловой игре все или некоторые компоненты системы-прототипа представлены игроками или командами игроков, а некоторые процессы, протекающие в прототипе (преимущественно, управленческие) – игровым поведением. Игроки или команды исполняют роли – парламентариев, руководителей (работников) структурных подразделений организаций и т. д. Иные компоненты прототипа могут отображаться формальными моделями: компьютерными программами, таблицами для ручной обработки информации и т. п.

В процессе проведения деловой игры разыгрывается сценарий, моделирующий поведение социально-экономической системы. Обычно проведение деловой игры состоит из нескольких шагов, последовательность которых моделирует течение реального времени. На каждом шаге игроки делают свои ходы – выбирают очередной акт своего поведения (например, принимают очередное управленческое решение), после чего определяется реакция системы на действия игроков. Эта реакция вычисляется формальной частью модели (с помощью компьютера или вручную), либо неформально устанавливается специально привлекаемыми экспертами. После окончания игры руководитель проводит анализ ее результатов.

Экспертные оценки – экспертные суждения, полученные при применении экспертного метода и выраженные в любой шкале измерения. Частным случаем экспертных оценок являются экспертные суждения, выраженные не в обычных числовых шкалах, а в шкале, в которой градации оцениваемого показателя представлены формулировками, имеющими качественный характер и проранжированными по изменению степени проявления этого показателя. Например, “исключительно важно”, “очень важно”, “важно”, “не очень важно”, “не важно”.

Экспертные методы – разнообразные методы решения задач, основанные на использовании суждений специалистов-экспертов.

Эксперт (от лат. expertus – опытный) – специалист в определенной области (науки, техники, искусства, управления, финансов и др.), приглашаемый для исследования каких-либо вопросов, решение которых требует его специальных знаний.

В соответствии с государственными образовательными стандартами высшего профессионального образования студенты, обучающиеся по специальностям 080105 “Финансы и кредит” и 080109 “Бухгалтерский учет”, анализ и аудит”, экспериментальные методы принятия решений в рамках дисциплины “Математика” не изучают.

1.5. Сведения об использовании экономико-математических методов в научной работе и практической деятельности

Сведения об использовании некоторых экономико-математических методов в повседневной научной работе, полученные в результате обследования научной деятельности группы действительных членов Американского общества исследования операций в **1970** году, представлены в табл. 1.

Сведения о частоте использования экономико-математических методов во внутрифирменном планировании, полученные в результате обследования 1000 крупнейших фирм США в **1971** году представлены в табл. 2.

Таблица 1

Полезность экономико-математических методов в повседневной научной работе

Наименование метода	Относительная ценность метода
Теория вероятностей и математическая статистика	0,182
Экономический анализ (оценка эффективности затрат)	0,150
Имитационное моделирование	0,143
Линейное программирование	0,120
Теория управления запасами	0,097
Теория массового обслуживания	0,085
Сетевые методы планирования и управления	0,072
Теория износа и замены оборудования	0,042
Теория игр	0,040
Динамическое программирование	0,031
Классическая теория поиска экстремума	0,020
Нелинейное программирование	0,018

В настоящее время использование экономико-математических методов во внутрифирменном планировании, например, в компании Procter&Gamble, позволяет получать экономию от их применения, в десятки раз превышающую затраты на построение, исследование и анализ экономико-математических моделей.

Таблица 2

Частота использования экономико-математических методов во внутрифирменном планировании

Наименование метода	Абсолютная частота использования	Относительная частота использования в %
Имитационное моделирование	60	29
Линейное программирование	43	21
Сетевые методы планирования и управления	28	14
Теория управления запасами	24	12
Нелинейное программирование	16	8
Динамическое программирование	8	4
Целочисленное программирование	7	3
Теория массового обслуживания	7	3
Прочие	12	6
Итого	205	100

К основным экономико-математическим методам, используемым в данной компании, относятся: математическая статистика, линейное программирование, теория массового обслуживания, теория игр, теория принятия решений, теория расписаний, имитационное моделирование. При этом особое внимание уделяется анализу чувствительности найденного оптимального решения к возможным изменениям параметров модели.

1.6. Список использованной литературы

1. Автоматизация управления предприятием / *Баронов В.В.* и др. – М.: ИНФРА-М, 2000. – 239с.
2. *Антес Г.* Магия исследования операций // Международный компьютерный еженедельник Computerworld, №11(460) от 22.03.2005г. – С. 50, 52.
3. *Бажин И.И.* Экономическая кибернетика: Компакт-учебник. – Харьков: Консум, 2004. – 292с.
4. *Вентцель Е.С.* Исследование операций: задачи принципы, методология. – М.: Наука, 1988. – 208с.
5. Вероятность и математическая статистика: Энциклопедия / Под ред. *Ю.В. Прохорова*. – М.: Большая Российская энциклопедия, 2003. – 912с.
6. *Глущенко В.В., Глущенко И.И.* Разработка управленческого решения. Прогнозирование – планирование. Теория проектирования экспериментов. – г. Железнодорожный, Моск. обл.: ТОО НПЦ “Крылья”, 1997. – 400с.
7. *Гранберг А.Г.* Математические модели социалистической экономики: Учеб. пособие. – М.: Экономика, 1978. – 351с.
8. *Емельянов А.А., Власова Е.А., Дума Р.В.* Имитационное моделирование экономических процессов: Учеб. пособие; Под ред. *А.А. Емельянова*. – М.: Финансы и статистика, 2004. – 368с.
9. *Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н.* Математические методы в экономике: Учебник. – М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, Издательство “ДИС”, 1998. – 368с.
10. Информационные технологии управления: Учеб. пособие / Под ред. *Ю.М. Черкасова*. – М.: ИНФРА-М, 2001. – 216с.

11. *Иозайтис В.С., Львов Ю.А.* Экономико-математическое моделирование производственных систем: Учеб. пособие. – М.: Высшая школа, 1991. – 192с.
12. Исследование операций в экономике: Учеб. пособие / *Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман*; Под ред. *Н.Ш. Кремера*. – М.: ЮНИТИ, 2002. – 407с.
13. *Клейнер Г.Б.* Экономико-математическое моделирование и экономическая теория // Экономика и математические методы, 2001, том 37, №3. – С. 111-126.
14. *Кобелев Н.Б.* Основы имитационного моделирования сложных экономических систем: Учеб. пособие. – М.: Дело, 2003. – 336с.
15. *Костевич Л.С.* Математическое программирование: Информационные технологии оптимальных решений: Учеб. пособие. – Минск: Новое знание, 2003. – 424с.
16. *Ларичев О.И.* Теория и методы принятия решений, а также Хроника событий в Волшебных странах: Учебник. – М.: Логос, 2002. – 392с.
17. Математика: Энциклопедия / Под ред. *Ю.В. Прохорова*. – М.: Большая Российская энциклопедия, 2003. – 845с.
18. Математика и кибернетика в экономике: Словарь- справочник. – М.: Экономика, 1975. – 700с.
19. *Микиша А.М.* Математика: Основные термины: Толковый словарь: Более 3000 терминов. – М.: ООО “ Издательство Астрель”: ООО “Издательство АСТ”, 2003. – 448с.
20. *Орехов Н.А., Левин А.Г., Горбунов Е.А.* Математические методы и модели в экономике: Учеб. пособие / Под ред. *Н.А. Орехова*. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004. – 302с.
21. Прикладная статистика. Основы эконометрики: Учебник: В 2 т. Т. 1: *Айвазян С.А. Мхитарян В.С.* Теория вероятностей и прикладная статистика. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001. – 656с.

22. *Рыжиков Ю.И.* Имитационное моделирование. Теория и технологии. – СПб.: КОРОНА принт; М.: Альтекс-А, 2004. – 384с.
23. *Рыжиков Ю.И.* Теория очередей и управления запасами. – СПб.: Питер, 2001. – 384с.
24. *Фатхутдинов Р.А.* Разработка управленческого решения: Учебник для вузов. – М.: ЗАО "Бизнес-школа "Интел Синтез", 1999. – 240с.
25. *Фомин Г.П.* Методы и модели линейного программирования в коммерческой деятельности: Учеб. пособие. – М.: Финансы и статистика, 2000. – 128с.
26. *Чернышев С.Л.* Моделирование систем и прогнозирование их развития: Учебник. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. – 232с.
27. *Шапкин А.С., Мазаева Н.П.* Математические методы и модели исследования операций: Учебник. – М.: Издательско-торговая корпорация "Дашков и К^0", 2003. – 400с.
28. *Шелобаев С.И.* Экономико-математические методы и модели: Учеб. пособие. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. – 287с.
29. *Шеннон Р.* Имитационное моделирование систем: искусство и наука / Пер. с англ. – М.: Мир, 1978. – 418с.
30. *Шукурьян С.И.* Линейное и целочисленное программирование: Учеб. пособие. – Тверь: ТвГУ, 2002. – 104с.
31. Экономико-математические методы и прикладные модели: Учеб. пособие для вузов / *В.В. Федосеев, А.Н. Гармаш, Д.М. Дайитбегов* и др.; Под ред. *В.В. Федосеева*. – М.: ЮНИТИ, 2002. – 391с.
32. Экономико-математический энциклопедический словарь / Гл. ред. *В.И. Данилов-Данильян*. – М.: Большая Российская энциклопедия: Издательский Дом "ИНФРА-М", 2003. – 688с.
33. Экономическая теория в вопросах и ответах: Учеб. пособие / Под ред. *И.П. Николаевой*. – М.: ООО "ТК Велби", 2002. – 192с.

2. ПРЕДМЕТ И ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ИГР

2.1. Предмет и основные задачи теории игр

В экономике иногда приходится сталкиваться с ситуациями, когда при наличии многих участников эффективность решения одного из них зависит от того, какие решения приняли другие участники. Например, доход предприятия от продажи изделия зависит не только от установленной на него цены, но и от количества купленных покупателями изделий. Или при выборе ассортимента товаров, выпускаемых предприятием, нужно учитывать, какой ассортимент товаров выпускают другие предприятия.

Все ситуации, когда эффективность действия одного из участников зависит от действий других участников, можно разделить на два типа:

1) интересы участников совпадают, и они могут договориться о совместных действиях;

2) интересы участников не совпадают.

Конфликтными ситуациями называются ситуации, в которых сталкиваются интересы двух (или более) сторон, преследующих разные (иногда противоположные) цели, и выигрыш каждой стороны зависит от того, как поведут себя другие участники конфликта.

Для изучения и анализа конфликтных ситуаций применяется специальный раздел математики, называемый теорий игр.

Теория игр – это теория математических моделей принятия оптимальных решений в условиях конфликтов, то есть теория выбора наиболее выгодного поведения при столкновении противоречивых интересов.

Математическое понятие игры возникло из рассмотрения различных азартных игр (шахмат, шашек, карточных игр и т. д.) Однако область его применения гораздо шире и охватывает весьма различные ситуации, в которых сталкиваются противоречивые интересы (конкурентная борьба, военные действия и т. д.).

Основной задачей теории игр является выработка рекомендаций по разумному поведению участников конфликта.

Содержание теории игр состоит:

1) в установлении принципов оптимального поведения участников конфликта;

2) в доказательстве существования ситуаций, которые складываются в результате применения этих принципов;

3) в разработке методов фактического нахождения (в том числе – численного) таких ситуаций.

Кроме того, теория игр развивает математический аппарат, облегчающий решение перечисленных задач.

Зарождение теории игр как математической дисциплины можно отнести к письму знаменитого французского философа, математика и физика **Блеза Паскаля (1623-1662)** к другому знаменитому французскому математику **Пьеру Ферма (1601-1665)** от **29 июля 1654 года**, которое принято считать началом математической теории вероятностей. В дальнейшем отдельные теоретико-игровые идеи и задачи рассматривались многими учеными.

В число разделов современной математики теория игр вошла в **1928** году в связи с появлением работы американского математика **Джона Неймана (1903-1957)** “К теории стратегических игр”, содержащей основные идеи современной теории игр.

В экономической сфере теория игр применяется при обосновании стратегий борьбы фирм за рынки, в планировании рекламных компаний, при формировании цен на конкурентных рынках, в биржевой игре и т. д.

В некоторых (редких) случаях методы теории игр дают возможность фактически найти оптимальное решение. Гораздо чаще эти методы позволяют просто глубже разобраться в ситуации, оценить каждое решение с различных (иногда противоречивых) точек зрения, взвесить его преимущества и недостатки и принять решение, если не единственно правильное, то, по крайней мере, до конца продуманное.

2.2. Основные понятия теории игр

Игра – упрощенная формализованная модель реальной конкретной ситуации. Математически формализация означает, что выработаны определенные правила действия сторон в процессе игры, то есть:

1) варианты действия сторон;
2) исход игры (выигрыш или проигрыш каждой стороны) при каждом варианте действия;
3) объем информации каждой стороны о поведении всех других сторон.

Конфликтующие стороны условно называются **игроками**. Одно осуществление игры называется **партией**. Исход игры называется **выигрышем** или **проигрышем**.

Развитие игры во времени представляется как последовательность ходов участников. **Ходом** называется выбор игроком одного из предусмотренных правилами игры действий и его осуществление. Ходы бывают личные и случайные.

Личным ходом называется сознательный выбор игроком одного из возможных вариантов действий и его осуществление (пример – любой ход в шахматы). **Случайным ходом** называется выбор из ряда возможностей, осуществляемый не решением игрока, а каким-либо механизмом случайного выбора (бросание монеты, выбор карты из перетасованной колоды, использование датчика случайных чисел).

Игры, состоящие только из случайных ходов, называются **азартными** (пример – игра в лото). Игры, в которых имеются (может быть, наряду со случайными) личные ходы, называются **стратегическими**. Существуют стратегические игры, состоящие только из личных ходов (например, игра в шахматы). Также существуют стратегические игры, состоящие как из личных, так и случайных ходов (например, карточные игры).

<u>Теория игр занимается анализом только стратегических игр</u>. <u>Задачей теории игр</u> является выработка оптимального поведения игрока в игре при выборе им личных ходов, то есть выработка определенных стратегий поведения игрока.

Стратегией игрока называется совокупность правил, определяющих выбор варианта действий при каждом личном ходе этого игрока в зависимости от сложившейся в процессе игры ситуации.

Целью теории игр является выработка рекомендаций для разумного поведения игроков в конфликтной ситуации, то есть определение оптимальной стратегии для каждого из них.

Оптимальной стратегией игрока называется такая стратегия, которая обеспечивает ему наилучшее положение в данной игре, то есть максимальный выигрыш. Если игра повторяется неоднократно и содержит, кроме личных, еще и случайные ходы, то оптимальная стратегия обеспечивает максимальный средний выигрыш.

Основное предположение, исходя из которого находятся оптимальные стратегии, состоит в том, что конфликтующая сторона (стороны), по меньшей мере, так же разумна, как и сам игрок, и делает все для того, чтобы добиться своей цели. Расчет на разумного противника – лишь одна из позиций в конфликте, но в теории игр именно она кладется в основу.

В теории игр все рекомендации вырабатываются исходя именно из этих принципов. Следовательно, в ней не учитываются просчеты и ошибки игроков, неизбежные в каждой конфликтной ситуации, а также элементы азарта и риска.

Теория игр, как и всякая математическая модель сложного явления, имеет свои ограничения. К ним относятся:

1) предположение о полной разумности конфликтующей стороны (в то время как в реальном конфликте зачастую оптимальная стратегия состоит в том, чтобы угадать, в чем противник “глуп”, и воспользоваться этой глупостью в свою пользу);

2) отсутствие в схемах теории игр элементов риска и азарта, неизбежно сопровождающих разумные решения в реальных конфликтах;

3) выбор наиболее осторожного, перестраховочного поведения участников конфликта;

4) искусственное сведение выигрыша к единственному числу (в большинстве конфликтных ситуаций при выборе разумной стратегии приходится принимать во внимание не один, а несколько числовых параметров – показателей эффективности).

Сознавая эти ограничения и поэтому не придерживаясь слепо рекомендаций, полученных игровыми методами, можно все же разумно использовать аппарат теории игр как “совещательный” для выработки, если не в точности оптимальной, то во всяком случае “приемлемой” стратегии.

2.3. Классификация игр

В теории игр выделяются различные виды игр. Признаками классификации игр являются:

1) количество игроков;

2) количество стратегий игры;

3) взаимоотношения сторон;

4) характер выигрышей;

5) вид функции выигрышей;

6) количество ходов;

7) информированность сторон.

По количеству игроков различают парные и множественные игры. **Парной игрой** или **игрой двух лиц** называется игра, в которой участвуют две стороны. Если число сторон больше двух, то игра называется **множественной** или **игрой *n* игроков**.

Участники множественной игры могут образовывать коалиции (постоянные или временные). Одна из задач теории игр – выявление разумных коалиций во множественной игре и правил обмена информацией между участниками. Множественная игра с двумя постоянными коалициями обращается в парную игру.

По количеству стратегий игры делятся на конечные и бесконечные. Игра называется **конечной**, если у каждого игрока имеется только конечное число стратегий, и **бесконечной**, если хотя бы у одного из игроков имеется бесконечное число стратегий.

Простейшим примером конечной игры является игра в орлянку, в которой каждый игрок имеет два возможных хода – выбор “орла” или “решки”. Примером бесконечной игры являются взаимоотношения между продавцом и покупателем, в которой каждый из игроков может назвать любую устраивающую его цену и количество продаваемого (покупаемого) товара.

В зависимости от взаимоотношений сторон игры делятся на бескоалиционные, коалиционные и кооперативные.

Бескоалиционной игрой называется игра, в которой игроки не имеют права вступать в соглашения, то есть создавать коалиции.

Коалиционной игрой называется игра, в которой игроки имеют право вступать в соглашения, то есть создавать коалиции.

Кооперативной игрой называется игра, в которой игроки до начала игры образуют коалиции и принимают взаимообязывающие соглашения о своих стратегиях. Примером кооперативной игры может служить ситуация образования коалиций в парламенте для принятия путем голосования решения, так или иначе затрагивающего интересы участников голосования.

По характеру выигрышей выделяются игры с нулевой суммой, с постоянной разностью и с ненулевой суммой.

Игрой с нулевой суммой называется игра, в которой сумма выигрышей всех игроков в каждой партии равна нулю, то есть каждый игрок выигрывает только за счет других. Самым простым случаем игры с нулевой суммой является **парная игра с нулевой суммой**, называемая также **антагонистической игрой**. В антагонистической игре выигрыш одного из игроков равен проигрышу другого, то есть налицо прямой конфликт между игроками. Типичными примерами антагонистических игр являются игры в очко или в орлянку. Теория антагонистических игр представляет собой наиболее развитый раздел теории игр с четкими рекомендациями.

Прямой противоположностью играм с нулевой суммой являются **игры с постоянной разностью**, в которых игроки и выигрывают и проигрываю одновременно, так что им выгодно действовать сообща.

Игрой с ненулевой суммой называется игра, в которой нужно платить взнос за право участия в ней. Игры с ненулевой суммой находятся между играми с нулевой суммой и играми с постоянной разностью. В играх с ненулевой суммой предполагаются и конфликты, и согласованные действия сторон. Примером такой игры могут служить торговые взаимоотношения стран, в которой все участники могут оказаться в выигрыше.

По виду функции выигрышей игры подразделяются на матричные, биматричные, непрерывные, сепарабельные и другие.

В каждой партии каждый игрок выбирает некоторую свою стратегию. Совокупность стратегий, выбранных всеми игроками в одной партии, называется **ситуацией**.

В теории игр выигрыш каждого игрока в каждой ситуации задается каким-либо числом, выражающим степень удовлетворения его интересов в данной ситуации. Соответствие между набором ситуаций и выигрышем игрока называется **функций выигрыша** или **платежной функцией** этого игрока.

В случае конечной игры двух лиц функции выигрыша каждого из игроков удобно представлять в виде **матрицы выигрышей** (или **платежной матрицы**), в которой строки представляют стратегии одного игрока, столбцы – стратегии другого игрока, а в клетках матрицы указываются выигрыши каждого из игроков.

Матричной игрой называется конечная игра двух игроков с нулевой суммой. В такой игре выигрыш одного игрока равен проигрышу другого. Поэтому выигрыши двух игроков могут быть представлены в виде одной платежной матрицы. При этом номер строки такой матрицы соответствует номеру стратегии первого игрока, а номер столбца – номеру стратегии второго игрока. Элементом платежной матрицы является выигрыш первого игрока и соответственно проигрыш второго.

Биматричной игрой называется конечная игра двух игроков с ненулевой суммой. Выигрыши каждого игрока в такой игре задаются своей платежной матрицей. Элемент первой платежной матрицы показывает выигрыш первого игрока, а элемент второй матрицы – выигрыш второго игрока.

Непрерывной игрой называется игра, в которой функции выигрышей каждого игрока являются непрерывными.

Сепарабельной игрой называется игра, в которой функция выигрыша каждого игрока может быть представлена в виде суммы произведений функций одного аргумента.

<u>По количеству ходов</u> игры можно разделить на одношаговые и многошаговые.

Одношаговой игрой называется игра, которая заканчивается после одного хода каждого игрока. Так, в матричной игре после одного хода каждого из игроков происходит распределение выигрышей.

Многошаговой игрой называется игра, которая заканчивается после определенного числа ходов каждого из игроков.

<u>По информированности сторон</u> различают игры с полной и с неполной информацией.

Игрой с полной информацией называется игра, в которой каждый игрок на каждом ходу игры знает все ранее примененные другими игроками на предыдущих ходах стратегии.

Игрой с неполной информацией называется игра, в которой игроку известны не все стратегии предыдущих ходов других игроков.

Игры с неполной информацией называются также **играми с природой**. Отличительная особенность игры с природой состоит в том, что в ней сознательно действует только один из участников, называемый первым игроком. Второй игрок (природа) сознательно против первого игрока не действует, а выступает как не имеющий конкретной цели и случайным образом выбирающий очередные “ходы” по игре партнер.

“**Природа**” рассматривается как некая незаинтересованная инстанция, поведение которой неизвестно, но, во всяком случае, не содержит элемента сознательного противодействия планам первого игрока. Поэтому термин “природа” не следует понимать буквально, хотя вполне могут встретиться ситуации, в которых вторым игроком, действительно может быть природа (например, обстоятельства, связанные с погодными условиями или с природными стихийными силами).

В теории игр различаются два основных вида неопределенности о состояниях природы:

1) **стохастическая** (вероятностная) или ”**доброкачественная**” неопределенность, когда неизвестные состояния природы представляют случайные величины, вероятностные характеристики которых известны или могут быть получены в результате статистических экспериментов;

2) **полная** (“**дурная**”, “**безнадежная**”) неопределенность, когда неизвестные состояния природы не могут быть изучены и описаны статистическими методами, то есть а) их законы распределения не могут быть получены к моменту принятия решения или б) таких законов распределения вообще не существует (это бывает, когда явление, о котором идет речь не обладает свойством статистической устойчивости).

Игра с природой в условиях стохастической неопределенности о состояниях природы с использованием человеком дополнительной статистической информации об этих состояниях называется **статистической игрой**. В статистической игре имеется возможность получения дополнительной информации на основе статистического эксперимента, по результатам которого оценивается распределение вероятностей состояний (стратегий) природы.

2.4. Список использованной литературы

1. *Вентцель Е.С.* Исследование операций. – М.: Советское радио, 1972. – 552с.
2. *Вентцель Е.С.* Исследование операций: задачи, принципы, методология. – М.: Наука, 1988. – 208с.

3. *Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н.* Математические методы в экономике: Учебник. – М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, Издательство “ДИС”, 1998. – 368с.
4. Математика и кибернетика в экономике: Словарь-справочник. – М.: Экономика, 1975. – 700с.
5. Математическая энциклопедия / Гл. ред. *И.М. Виноградов*. Т. 2. Д-Коо. – М.: Советская энциклопедия, 1979. – 1104с.
6. Моделирование рисковых ситуаций в экономике и бизнесе: Учеб. пособие / *А.М. Дубров, Б.А. Лагоша, Е.Ю. Хрусталев, Т.П. Барановская*; Под ред. *Б.А. Лагоши*. – М.: Финансы и статистика, 2001. – 224с.

3. ПРЕДМЕТ И ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

3.1. Предмет и основные понятия теории массового обслуживания

Во многих областях человеческой деятельности приходится сталкиваться со своеобразными системами обслуживания, предназначенными для многократного использования при решении однотипных задач и называемыми **системами массового обслуживания** (СМО). В таких системах в случайные (или не в случайные) моменты времени возникают заявки на обслуживание и имеются устройства для обслуживания этих заявок.

Примерами СМО в разных областях являются:

1) в телефонии – телефонные станции, в которых заявка – это вызов абонента, а обслуживающее устройство – коммутатор;

2) в экономике – а) разные системы поставок, в которых заявка – требование на продукцию определенного вида, а обслуживающее устройство – склад или заводы, изготавливающие эту продукцию; б) разные системы бытового обслуживания – ремонтные мастерские, билетные кассы, справочные бюро, магазины, парикмахерские и т. п., в которых заявка – требование на определенный вид обслуживания, а обслуживающее устройство – работник сферы обслуживания (мастер по ремонту, кассир, продавец, парикмахер и т. п.);

3) в медицине – система госпитализации больных, в которой заявка – это появление больного, которого необходимо госпитализировать, а обслуживающее устройство – больница с ограниченным числом больничных коек.

Основными элементами СМО являются:

1) входящий поток событий (поток заявок, поток требований), поступающих в какие-то случайные моменты времени;

2) обслуживающие устройства, называемые также **каналами обслуживания**;

3) выходящий поток событий, зависящий от длительности обслуживания входящего потока в каналах обслуживания.

Назначение любой СМО заключается в обслуживании какого-либо потока заявок, которые поступают, как правило, в случайные моменты времени. Обслуживание заявки продолжается какое-то, в общем случае, случайное время, после чего канал освобождается, и готов к приему следующей заявки. Случайный характер потока заявок и времен обслуживания приводит к тому, что СМО оказываются загруженными неравномерно. В какие-то периоды времени на входе СМО скапливается излишне большое число заявок (они либо становятся в очередь на обслуживание, либо покидают СМО необслуженными). В другие периоды времени СМО работают с недогрузкой или простаивают.

Процесс работы СМО представляет собой случайный процесс с дискетными состояниями и дискретным временем. Это означает, что состояние СМО меняется скачком в случайные моменты появления каких-либо событий (например, прихода новой заявки, окончания обслуживания заявки или момента, когда заявка, которой надоело ждать, покидает очередь).

Случайным (**вероятностным** или **стохастическим**) **процессом** называется процесс изменения во времени состояния какой-либо системы в соответствии с вероятностными закономерностями.

Случайным процессом с дискретными состояниями называется процесс, возможные состояния которого можно перечислить, а переход системы из состояния в состояние происходит мгновенно (скачком).

Случайным процессом с непрерывным временем называется процесс, в котором моменты возможных переходов системы из состояния в состояние не фиксированы заранее, а случайны.

Оптимизация работы СМО может производиться под разными углами зрения: с точки зрения организаторов (или владельцев) СМО или с точки зрения обслуживаемых клиентов.

С первой точки зрения желательно “выжать все, что возможно” из СМО и добиться того, чтобы ее каналы были предельно загружены. С точки зрения клиентов желательно всемерное уменьшение очередей. При решении задач оптимизации работы СМО необходим системный подход, предполагающий полное и комплексное рассмотрение всех последствий каждого решения. Например, с точки зрения клиентов желательно увеличение числа каналов обслуживания, но работу каждого канала надо оплачивать, что удорожает обслуживание.

Решение оптимизационной задачи о разумном числе каналов с учетом всех “за” и “против” возможно путем построения математической модели СМО.

Исследованием разных СМО занимается прикладной раздел теории случайных процессов, который называется **теорией массового обслуживания**.

<u>Предмет исследования теории массового обслуживания</u> можно определить как:

1) построение и исследование вероятностных моделей реальных систем обслуживания, в которых в случайные (или не в случайные) моменты времени возникают заявки на обслуживание и имеются устройства для обслуживания этих заявок;

2) построение и исследование математических моделей, связывающих заданные условия работы СМО (число каналов, их производительность, правила работы и характер потока заявок) с показателями эффективности СМО, описывающими ее способность справляться с потоком заявок.

Термин “теория массового обслуживания” принадлежит российскому математику **Александру Яковлевичу Хинчину (1894 - 1959)**. В литературе на английском языке для соответствующего класса задач чаще употребляется термин “**теория очередей**”.

Первоначально теория массового обслуживания возникла для решения задач телефонии. В настоящее время трудно назвать область человеческой деятельности, где бы ни применялись идеи теории массового обслуживания.

3.2. Классификация систем массового обслуживания

СМО делятся на типы по ряду признаков. К основным из них относятся:

1) количество каналов обслуживания;
2) характер формирования очереди;
3) расположение источника заявок.

По количеству каналов обслуживания СМО делятся на **одноканальные** и **многоканальные**.

Классификация СМО по характеру формирования очереди представлена на рис. 2.

СМО с отказами – СМО, в которой заявка, поступившая в момент, когда все каналы заняты, получает отказ, покидает СМО и в дальнейшем процессе обслуживания не участвует (например, заявка на телефонный разговор, пришедшая в момент, когда все каналы заняты, получает отказ и покидает СМО необслуженной).

СМО с очередью (**с ожиданием**) – СМО, в которой заявка, поступившая в момент, когда все каналы заняты, не уходит, а становится в очередь на обслуживание.

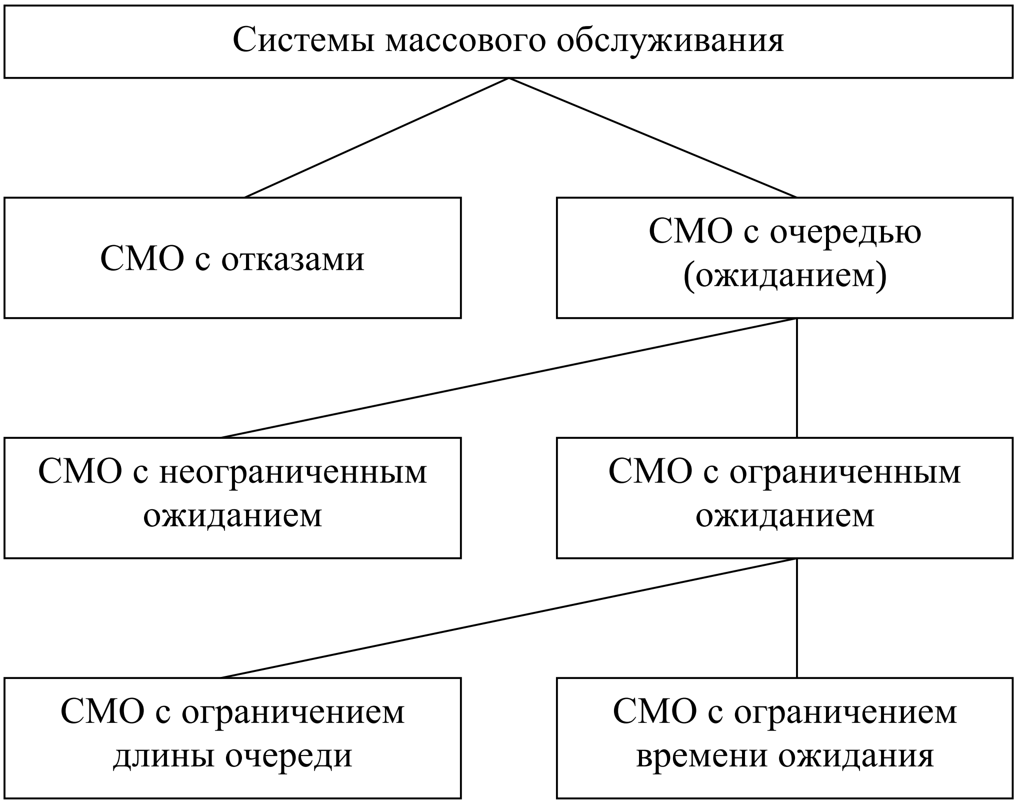

Рис. 2. **Классификация СМО по характеру формирования очереди**

СМО с очередью, в свою очередь, подразделяются на разные виды по:

1) организации очереди;
2) дисциплине обслуживания.

СМО с очередью в зависимости от того, как организована очередь, подразделяются на СМО с неограниченным ожиданием и СМО с ограниченным ожиданием.

СМО с неограниченным ожиданием – СМО, в которой каждая заявка, поступившая в момент, когда нет свободных каналов, становится в очередь и “терпеливо” ждет освобождения канала, который примет ее к обслуживанию. При этом любая заявка, поступившая в СМО, рано или поздно будет обслужена.

СМО с ограниченным ожиданием – СМО, в которой на пребывание заявки в очереди накладываются те или иные ограничения. Эти ограничения могут касаться:

а) **длины очереди**, то есть числа заявок, одновременно находящихся в очереди (заявка получает отказ, если приходит в момент, когда все места в очереди заняты; заявка, попавшая в очередь, обслуживается обязательно);

б) **времени пребывания заявки в очереди** (после какого-то срока пребывания в очереди заявка покидает очередь и уходит; такие СМО называются иногда “**СМО с нетерпеливыми клиентами**”).

СМО с очередью в зависимости от **дисциплины обслуживания**, определяющей порядок выбора заявок из числа поступивших и порядок их распределения между свободными каналами, подразделяются на СМО с обслуживанием заявок:

1) **в порядке поступления** по принципу “первая пришла, первая обслужена”;

2) **в обратном порядке** по принципу “последняя пришла – первая обслужена” (такой порядок может применяться, например, при извлечении для обслуживания изделий со склада, так как последние из них оказываются часто более доступными);

3) **в случайном порядке**;

4) **в порядке приоритета**, когда в первую очередь обслуживаются наиболее важные заявки (приоритет может быть как **абсолютным**, когда более важная заявка “вытесняет” из-под обслуживания менее важную (например, в случае аварийной ситуации плановые работы ремонтных бригад прерываются до ликвидации аварии), так и **относительным**, когда начатое обслуживание доводится до конца, а заявка с более высоким приоритетом получает лишь лучшее место в очереди).

По расположению источника требований СМО делятся на два класса:

1) **разомкнутые** (**открытые**), в которых источник заявок находится вне системы и характеристики потока заявок не зависят от того, в каком состоянии находится сама СМО (сколько каналов занято);

2) **замкнутые**, в которых источник заявок находится в самой системе и характеристики потока заявок зависят от того, в каком состоянии СМО находится.

3.3. Список использованной литературы

1. *Вентцель Е.С.* Исследование операций. – М.: Советское радио, 1972. – 552с.
2. *Вентцель Е.С.* Исследование операций: задачи, принципы, методология. – М.: Наука, 1988. – 208с.
3. Исследование операций в экономике: Учеб. пособие / *Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман*; Под ред. *Н.Ш. Кремера*. – М.: ЮНИТИ, 2002. – 407с.
4. *Красс М.С., Чупрынов Б.П.* Основы математики и ее приложения в экономическом образовании: Учебник. – М.: Дело, 2002. – 688с.
5. Математика и кибернетика в экономике: Словарь-справочник. – М.: Экономика, 1975. – 700с.

4. СУЩНОСТЬ И УСЛОВИЯ ПРИМЕНИМОСТИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

4.1. Детерминистский и стохастический подходы к изучению явлений природы и общества

Цель любой науки заключается в описании, объяснении и предсказании явлений действительности на основе установленных законов, что позволяет находить решения в типичных ситуациях.

Все явления природы и общества могут быть разделены на несколько классов. Среди них важное значение занимают детерминированные и случайные явления.

Детерминированное явление – такое явление, которое в конкретных условиях опыта протекает вполне определенным образом.

Случайное явление – такое явление, которое при неоднократном воспроизведении одного и того же опыта протекает каждый раз несколько по-иному.

Подавляющая часть сведений, получаемых учащимися в школьных курсах физики, математики, химии, относится к детерминированным явлениям.

Например, если в основании пирамиды находится квадрат со стороной a и ее высота равна h, то объем пирамиды равен $\frac{1}{3}a^2 h$.

Если тело свободно падает на земную поверхность, то путь, пройденный им за t секунд после начала падения, равен $gt^2/2$.

Если химически чистую воду при атмосферном давлении 760 мм ртутного столба нагреть до 100^0 С, то вода начнет превращаться в пар.

В качестве примеров случайных явлений можно привести следующие явления.

1. Круглая, правильной формы монета подбрасывается, вращается в воздухе и падает на стол одной из сторон: “гербом” или “решкой”. Опыт повторяется несколько раз. Как бы ни стараться соблюдать его условия (высоту подбрасывания, начальную скорость и момент вращения), результат изменяется от раза к разу: иногда выпадает “герб”, иногда – “решка”. Исход опыта – “герб” или “решка” – обусловлен множеством мелких, трудноуловимых причин, в числе которых, например, неровности поверхности стола.

2. Одно и то же тело несколько раз взвешивается на точных весах. Результаты повторных взвешиваний несколько отличаются друг от друга. Это происходит за счет влияния многих мелких второстепенных причин, сопровождающих взвешивание, таких, например, как положение тела и гирь на чашах весов, вибрации аппаратуры, смещение головы и глаза наблюдателя и т.п.

3. Производится ряд испытаний заводских изделий определенного типа, например реле, на длительность безотказной работы. Результат испытания от раза к разу не остается постоянным, меняется. Эти изменения обусловлены влиянием ряда малозначительных, трудноуловимых факторов, таких, например, как микродефекты в металле, разные температурные условия, разные условия хранения и транспортировки изделий, отклонения напряжения от номинала и т.д.

Все приведенные примеры рассмотрены здесь под одним и тем же углом зрения: подчеркнуты случайные изменения, неодинаковые результаты ряда одних и тех же опытов, основные условия которых остаются неизменными. Эти изменения всегда связаны с наличием каких-то второстепенных факторов, влияющих на исход опыта, но не заданных в числе его основных условий. Основные условия опыта, определяющие в общих и грубых чертах его протекание, сохраняются неизменными; второстепенные – меняются от опыта к опыту и вносят случайные различия в их результаты.

В природе и обществе практически нет ни одного явления, в котором не присутствовали бы в той или иной мере элементы случайности. Как бы точно и подробно ни были фиксированы условия опыта, невозможно достигнуть того, чтобы при его повторении результаты полностью и в точности совпадали. Случайные отклонения неизбежно сопутствуют каждому закономерному явлению. Тем не менее, в ряде практических задач этими случайными отклонениями пренебрегают и рассматривают вместо реального явления его **модель** (материально или мысленно представляемый объект, который в процессе исследования замещает объект-оригинал так, что его непосредственное изучение дает новые знания об объекте-оригинале), предполагая, что в данных условиях опыта явление протекает вполне определенным образом. При этом из бесчисленного множества условий, влияющих на явление, выделяются самые главные, а влиянием остальных, второстепенных условий просто пренебрегают. Такой подход к описанию и изучению явлений природы и общества, предполагающий наличие причинной обусловленности явлений, называется **детерминистским**.

Схема применения детерминистского подхода для решения любой задачи включает следующие два основных этапа:

1) выделение основного круга учитываемых условий и выяснение, на какие параметры задачи он влияет;

2) применение того или иного математического аппарата (например, составление и решение дифференциальных уравнений, описывающих явление) для выявления свойственной данному явлению основной закономерности, которая позволяет предсказать результат опыта по его заданным условиям.

По мере развития науки число учитываемых условий становится все больше, научный прогноз все точнее. Это – классическая схема так называемых “точных наук”: от условий опыта к его однозначному результату.

Однако для решения ряда задач детерминистский подход оказывается плохо приспособленным. Существуют такие задачи, где результат опыта зависит от столь большого числа условий, что их практически невозможно зарегистрировать и учесть. В таких задачах многочисленные второстепенные и тесно переплетающиеся между собой случайные условия опыта так тесно связаны с результатом опыта, что их ничтожное изменение может сыграть решающую роль и привести к другому результату.

Применение для изучения таких случайных явлений детерминистского подхода теоретически возможно путем повышения точности решения за счет учета все новых и новых условий. Однако на практике попытка одинаково подробно и тщательно проанализировать влияние всех факторов, от которых зависит явление, привела бы только к тому, что решение в силу непомерной громоздкости и сложности, оказалось бы практически неосуществимым и к тому же не имело бы никакой познавательной ценности, относясь только к узкому кругу плохо контролируемых условий.

Неопределенность, сложность и многопричинность случайных явлений обусловливают необходимость применения для их описания и изучения специальных подходов. К одному из таких подходов **относится стохастический (вероятностный) подход**, основанный на проявлении в массе однородных случайных явлений устойчивых закономерностей.

Подобного рода закономерности называются **статистическими**. Они наблюдаются только в массе однородных случайных явлений. Закономерности, проявляющиеся в этой массе, практически не зависят от индивидуальных особенностей отдельных случайных явлений, входящих в эту массу. Эти отдельные особенности в массе как бы взаимно погашаются, и средний результат массы случайных явлений оказывается практически уже не случайным, предсказуемым. Эта многократно подтвержденная опытом устойчивость массовых случайных явлений и служит базой для применения стохастического подхода к изучению случайных явлений.

Например, если много раз подряд бросать монету, частота появления герба (отношение числа выпавших гербов к общему числу бросаний) постепенно выравнивается, стабилизируется, приближаясь ко вполне определенному числу, а именно к 1/2. Такое же свойство устойчивости частот наблюдается и при многократном повторении ряда других опытов с заранее неизвестным, неопределенным исходом. Так, например, в хорошо налаженном производстве устойчивым является процент доброкачественных изделий. Частота рождения мальчиков для самых разных географических и климатических условий также весьма устойчива и приблизительно равна 0,51. Устойчивость частот наблюдается даже в таких непредсказуемых явлениях, как уличный травматизм (эта устойчивость позволяет планировать работу лечебных учреждений и службы скорой помощи).

Свойством устойчивости частот не обладают явления с неопределенным исходом, где условия неоднородны и даже несопоставимы. Например, бессмысленно говорить об устойчивой “частоте возникновения войн”, так как историческому процессу свойственны черты неповторимости, направленности развития. Также бессмысленно говорить об устойчивой частоте правильно решенных научных проблем или появления гениальных произведений искусства.

Цель применения стохастического подхода к изучению случайных явлений состоит в том, чтобы, минуя слишком сложное (и зачастую практически невозможное) изучение отдельного явления, обусловленного слишком большим количеством причин (условий), обратиться непосредственно к законам, характеризующим массы случайных явлений. Изучение этих законов позволяет не только осуществлять научный прогноз случайных явлений, но в ряде случаев помогает целенаправленно влиять на ход случайных явлений, контролировать их, ограничивать сферу действия случайности, сужать ее влияние на практику.

4.2. Стохастические подходы к изучению случайных явлений

В рамках стохастического подхода к изучению и предсказанию массовых однородных случайных явлений существуют три способа принятия решения о среднем результате этих явлений: статистический, теоретико-вероятностный и вероятностно-статистический.

Статистический способ принятия решения основан на здравом смысле. Он состоит в наблюдении массы однородных случайных явлений на каком-либо интервале времени, в подсчете относительных частот их наступления и в предсказании наступления в будущем события, относительная частота наступления которого на интервале наблюдения была наибольшей.

Теоретико-вероятностный способ принятия решения (или **теория вероятностей**) основан на определенной математической модели изучаемого случайного явления.

Математическая модель – это абстракция реального мира, в которой интересующие исследователя отношения между реальными элементами заменены подходящими отношениями между математическими объектами.

Математические модели, предназначенные для описания случайных явлений, называются вероятностными или стохастическими. **Вероятностная модель** – это математическая модель, имитирующая механизм функционирования гипотетического (не конкретного) реального явления или системы стохастической природы.

Суть теоретико-вероятностного способа решения состоит в предсказании возможных явлений на основе их вероятностных моделей.

Вероятностно-статистический (или **математико-статистический**) способ принятия решения (или **математическая статистика**) объединяет инструментарий статистического и теоретико-вероятностного способов. При выработке решения с помощью этого способа используются и накопленные в результате наблюдений массы однородных случайных явлений исходные статистические данные (например, в виде относительных частот наступления явлений) и вероятностные модели. Однако применяемая в вероятностно-статистическом способе вероятностная модель менее жестка, менее ограниченна, она как бы настраивается на реальную действительность, используя для этого накопленную статистическую информацию.

Вероятностно-статистическая модель – это вероятностная модель, значения отдельных характеристик (параметров) которой оцениваются по результатам наблюдений, характеризующим функционирование моделируемого конкретного (а не гипотетического) явления или системы. Вероятностно-статистическая модель, описывающая механизм функционирования экономической или социально-экономической системы, называется **эконометрической**.

4.3. Сущность теории вероятностей и математической статистики и взаимосвязь между ними

Теория вероятностей – математическая наука, предназначенная для разработки и исследования свойств математических моделей, имитирующих механизмы функционирования реальных явлений или систем, условия существования которых включают в себя неизбежность влияния большого числа случайных (то есть не поддающихся строгому учету и контролю) факторов.

Методы теории вероятностей приспособлены только для исследования массовых случайных явлений. Они не дают возможности предсказать исход одного отдельного случайного явления, но дают возможность приближенно предсказать средний суммарный результат массы однородных случайных явлений, предсказать средний исход массы аналогичных опытов, конкретный исход каждого из которых остается неопределенным, случайным.

Прогнозы (предсказания), даваемые методами теории вероятностей, отличаются по своему характеру от прогнозов “точных наук”. Вероятностный прогноз является приближенным. Он не дает точного указания, что именно произойдет при таких-то условиях, а указывает только границы, в которых с достаточно высокой степенью достоверности, будут заключены интересующие исследователя параметры. Чем обширнее изучаемый массив случайных явлений, тем уже эти границы, тем точнее и определеннее становится вероятностный прогноз.

Характерным для сегодняшнего этапа развития науки является все более широкое применение вероятностных методов во всех ее областях, в частности, в экономике.

Экономические явления сложны и многообразны. Между ними существуют многосторонние связи, которые изменяются под влиянием множества факторов, по разному действующих в разные моменты времени, и в результате их изменения носят случайный характер. При этом, как правило, отсутствует возможность постановки “чистого эксперимента”, позволяющего выделить главные, решающие факторы и исключить влияние многих второстепенных. Поэтому особенно важным становится определение общих закономерностей на базе наблюдения за частью случайных явлений, отделение основных определяющих связей и зависимостей от случайных воздействий. Полученные таким образом выводы будут характеризовать экономическое явление “в среднем” и выражаться в форме вероятностных, а не однозначно-определенных утверждений.

Методы теории вероятностей и основанные на них методы математической статистики используются при планировании и организации производства, при анализе технологических процессов, при организации контроля качества продукции и для многих других целей.

Математическая статистика – система основанных на теоретико-вероятностных моделях понятий, приемов и математических методов, предназначенных для сбора, систематизации, истолкования и обработки статистических данных с целью получения научных и практических выводов.

Одно из главных назначений методов математической статистики – обоснованный выбор среди множества возможных теоретико-вероятностных моделей той модели, которая наилучшим образом соответствует имеющимся в распоряжении исследователя статистическим данным, характеризующим реальное явление (поведение конкретной исследуемой системы).

Теория вероятностей и математическая статистика представляют собой две неразрывно связанные науки. Математическая статистика, опираясь на вероятностные модели, в свою очередь, влияет на развитие теории вероятностей. Окружающий нас мир многообразен, и задачи, возникающие при изучении тех или иных случайных явлений, при статистической обработке результатов наблюдений над ними приводят к разработке новых вероятностных моделей.

Взаимосвязь теории вероятностей и математической статистики наглядно проявляется в схеме математико-статистического исследования случайного явления, основными этапами которой являются:

1) статистическая обработка результатов наблюдений случайного явления;

2) выдвижение гипотез (предположений) о возможности описания исследуемого случайного явления той или иной теоретико-вероятностной моделью;

3) выбор методами математической статистики теоретико-вероятностной модели, наиболее подходящей для описания исследуемого случайного явления;

4) проверка на практике обоснованности использования выбранной модели.

Таким образом, теория вероятностей предоставляет исследователю набор математических моделей, предназначенных для описания закономерностей в поведении реальных явлений или систем, функционирование которых происходит под влиянием большого числа взаимодействующих случайных факторов, а математическая статистика позволяет выбрать из множества возможных теоретико-вероятностных моделей ту, которая, в определенном смысле, наилучшим образом соответствует имеющимся в распоряжении исследователя статистическим данным, характеризующим реальное поведение конкретной исследуемой системы.

При этом следует еще раз подчеркнуть, что теория вероятностей изучает закономерности случайных явлений на основе абстрактного описания действительности, а математическая статистика оперирует непосредственно результатами наблюдений за случайными явлениями.

4.4. Условия применимости методов теории вероятностей и математической статистики

Методы теории вероятностей и математической статистики применимы только для исследования массовых однородных случайных явлений, для которых предполагается наличие устойчивости частот.

Под **массовыми явлениями** понимаются явления, которые имеют место в совокупностях большого числа равноправных или почти равноправных объектов и определяются именно этим массовым характером явлений и лишь в незначительной мере зависят от природы составляющих объектов.

Следует особо подчеркнуть, что методы теории вероятностей и математической статистики применимы для изучения не любых случайных явлений, а только тех из них, которые обладают определенными свойствами. К этим свойствам относятся:

1) возможность (хотя бы мысленно реально представимая) многократного наблюдения явления или повторения опытов в неизменных условиях;

2) наличие большого числа случайных факторов, которые характеризуют условия наблюдения явления или проведения опытов и не позволяют сделать полностью предопределенного (детерминированного) заключения о том, произойдет или не произойдет в результате наблюдений или опытов интересующее исследователя событие;

3) статистическая устойчивость (устойчивость частот), заключающаяся в приближении частоты появления интересующего исследователя события по мере увеличения количества наблюдений или опытов к некоторой постоянной величине, называемой вероятностью этого события.

Случайные явления, обладающие перечисленными свойствами, называются стохастическими. Теория вероятностей и математическая статистика применимы для исследования именно таких случайных величин. Условия (1)-(3) называются **условиями действия статистического ансамбля**.

Наиболее простые и убедительные примеры стохастических явлений (или явлений, укладывающихся в рамки статистического ансамбля) предоставляет область азартных игр. Так, вполне очевидно, что события “появление “герба” при подбрасывании монеты, “выпадение шести очков” при бросании игрального кубика и “появление “дамы пик” при вытаскивании наугад одной карты из колоды удовлетворяют условиям статистического ансамбля.

Вопрос о соблюдении условий статистического ансамбля в более серьезных и сложных сферах человеческой деятельности – в экономике, в социальных процессах, в технике и промышленности и в других отраслях науки – требует специального рассмотрения в каждом конкретном случае.

Следует отметить, что строгих математических методов, позволяющих точно определить, выполняются ли условия статистического ансамбля, не существует. Любая вероятностная модель, так же как и любая математическая модель вообще, есть лишь некоторое приближение к исследуемой реальной действительности. Можно лишь на основе накопившегося опыта вероятностно-статистических приложений условно разделить их на три области:

высокой работоспособности;

допустимого использования;

недопустимого использования.

<u>К области высокой работоспособности</u> методов теории вероятностей и математической статистики, в которой условия статистического ансамбля выполняются полностью или незначительно нарушаются, применительно к экономике и социологии относятся задачи, связанные с исследованием поведения объекта (индивидуума, семьи или другой социально-экономической или производственной единицы).

<u>К области допустимого использования</u> относятся ситуации, характеризующиеся весьма значительными нарушениями требования сохранения неизменности условий наблюдения (вторая половина первого требования) и вытекающими отсюда отклонениями от третьего требования. Характерной формой такого рода отклонений от условий статистического ансамбля

является объединение в одном ряду наблюдений (подлежащих обработке методами математической статистики) различных порций исходных данных, зарегистрированных в разных условиях. Применение вероятностно-статистических методов обработки в этом случае допустимо, но должно сопровождаться пояснениями о несовершенстве и приближенном характере получаемых при этом выводов и по возможности должно дополняться другими методами научного анализа.

К области недопустимого использования относятся ситуации, характеризующиеся принципиальным неприятием главной идеи понятия статистического ансамбля – массовости случайных явлений (первое требование) или полной детерминированностью изучаемого явления, то есть отсутствием “мешающего” влияния множества случайных факторов (нарушение второго требования). В подобных ситуациях для описания и предсказания явлений могут применяться методы анализа данных и методы, основанные на концепции субъективных вероятностей.

4.5. Сведения по истории развития методов теории вероятностей

Теория вероятностей, подобно другим математическим наукам, развилась из потребностей практики.

Начало систематического исследования задач, относящихся к массовым случайным явлениям, и появление соответствующего математического аппарата относятся к XVII веку. В начале XVII века знаменитый итальянский ученый **Галилео Галилей (1564 - 1642)** уже пытался подвергнуть научному исследованию ошибки физических измерений, рассматривая их как случайные и оценивая их вероятности. Эти исследования Галилея положили начало новой научной дисциплине – теории ошибок наблюдений, которая сыграла важную роль в формировании теории вероятностей и математической статистики.

К этому же времени относятся первые попытки создания общей теории страхования, основанной на анализе закономерностей в таких массовых случайных явлениях, как заболеваемость, смертность, несчастные случаи. Необходимость создания математического аппарата, специально приспособленного для анализа случайных явлений, вытекала из потребностей обработки и обобщения обширного статистического материала во всех областях науки.

Однако теория вероятностей как математическая наука сформировалась, в основном, не на материале практических задач: эти задачи слишком сложны; в них законы, управляющие случайными явлениями, проступают недостаточно отчетливо и затушеваны многими осложняющими факторами. Исторически более простым и удобным материалом для изучения закономерностей случайных явлений оказались азартные игры.

Эти игры с незапамятных времен создавались именно так, чтобы в них исход опыта был независим от поддающихся наблюдению условий опыта, был чисто случайным. Само слово азарт (от фр. le hasard) означает случай. Схемы азартных игр дают исключительные по простоте и прозрачности модели случайных явлений, позволяющие в наиболее отчетливой форме наблюдать и изучать управляющие ими специфические законы. А возможность неограниченно повторять один и тот же опыт обеспечивает экспериментальную проверку этих законов в условиях действительной массовости явлений. Вплоть до настоящего времени примеры из области азартных игр и аналогичные им задачи на так называемую "схему урн" широко употребляются при изучении теории вероятностей как упрощенные модели случайных явлений, иллюстрирующие в наиболее простом и наглядном виде основные законы и правила теории вероятностей.

Возникновение теории вероятностей в современном смысле слова относится к середине XVII века и связано с исследованиями **Блеза Паскаля (1623 - 1662)**, **Пьера Ферма (1601 - 1665)** и голландского ученого **Хри-**

стиана Гюйгенса (1629 - 1695) в области теории азартных игр. В их работах постепенно сформировались такие важные понятия, как вероятность и математическое ожидание; были установлены их основные свойства и приемы вычисления.

Считается, что исходным пунктом развития теории послужила переписка между двумя выдающимися математиками П. Ферма и Б. Паскалем. Эта переписка относится к **1654** г. и содержит главным образом решение задач на разделение ставки, связанных с рядом азартных игр. Эти письма были впервые опубликованы в Тулузе в **1697** г.

Еще до опубликования этих писем, примерно в **1656-1657** гг., Х. Гюйгенс, узнавший о том, что такие корифеи математики, как Ферма и Паскаль, серьезно заняты задачей на разделение ставки, подключился к этим исследованиям и в **1657** г. опубликовал работу “**О расчетах в азартной игре**” – первое увидевшее свет сочинение по теории вероятностей.

Непосредственное практическое применение вероятностные методы нашли, прежде всего, в задачах страхования. Уже с конца XVII века страхование стало производиться на научной математической основе. С тех пор теория вероятностей находит все более широкое применение в различных областях.

Крупный шаг вперед в развитии теории вероятностей связан с работами швейцарского ученого **Якоба Бернулли (1654 - 1705)**, который первым доказал одно из важнейших положений теории вероятностей – так называемый закон больших чисел. Если Х. Гюйгенс был первым ученым, возвестившим возникновение новой теории, то Я. Бернулли предложил первое ее название – “**Искусство предположений**”. Его книга “Искусство предположения” была опубликована после его смерти в **1713** г.

Другой важный этап в развитии теории вероятностей связан с именем французского математика **Абрахама Муавра (1667 - 1754)**, с 1685 г. жившего в Англии. В **1716** г. появилась его книга “Учение о случае”. В

1733 г. он впервые ввел в рассмотрение и обосновал для простейшего случая очень часто наблюдаемый в случайных явлениях своеобразный закон, называемый нормальным (или законом Гаусса).

Выдающаяся роль в развитии теории вероятностей принадлежит знаменитому французскому математику **Пьеру Симону Лапласу (1749 - 1827)**. Он впервые дал стройное и систематическое изложение основ теории вероятностей, доказал одну из форм центральной предельной теоремы (теорему Муавра-Лапласа) и развил ряд приложений теории вероятностей к вопросам практики, в частности к анализу ошибок наблюдений и измерений. Его монументальная работа “Аналитическая теория вероятностей” (**1812** г.) была настолько богата содержанием, что в ней можно обнаружить многие позднейшие открытия теории вероятностей.

Значительный шаг вперед в развитии теории вероятностей связан с именем немецкого математика **Карла Фридриха Гаусса (1777 - 1855)**, который дал общее обоснование нормальному закону и разработал метод обработки экспериментальных данных, известный под названием “метода наименьших квадратов”.

Следует также отметить работы **Симеона Дени Пуассона (1781 - 1840)**, доказавшего более общую, чем у Бернулли форму закона больших чисел и впервые применившего теорию вероятностей для решения задач теории стрельбы. Доказательство этой формы закона больших чисел содержалось в его основной работе “Исследования о вероятности судебных приговоров по уголовным и гражданским делам” (**1837** г.).

Для всего XVIII и начала XIX века характерны бурное развитие теории вероятностей и повсеместное увлечение ею. Теория вероятностей стала “модной” наукой. Ее начинают применять не только там, где это применение правомерно, но и там, где оно ничем не оправдано. Для этого периода характерны многочисленные попытки применить теорию вероятностей к изучению общественных явлений. Во множестве появились работы, посвященные вопросам истории, политики, даже богословия, в которых в той или иной мере применялся аппарат теории вероятностей. Естественно, что все подобные попытки приложения теории вероятностей были обречены на неудачу и не могли сыграть положительной роли в ее развитии. Напротив, их косвенным результатом оказалось то, что примерно в 20-х-30-х годах XIX века повсеместное увлечение теорией вероятностей сменилось разочарованием и скептицизмом. На теорию вероятностей стали смотреть как на науку сомнительную, второстепенную, род математического развлечения, вряд ли достойный серьезного изучения.

Именно в это время в России создается знаменитая Петербургская математическая школа, трудами которой теория вероятностей была поставлена на прочную логическую и математическую основу и сделана надежным, точным и эффективным методом познания. Со времени появления этой школы развитие теории вероятностей уже теснейшим образом связано с работами русских, а в дальнейшем советских ученых.

Среди ученых Петербургской математической школы в первую очередь следует назвать **Виктора Яковлевича Буняковского (1804 - 1889)** – автора первого курса теории вероятностей на русском языке, изданного в 1846 году под названием “Основания математической теории вероятностей”. Основная заслуга В.Я. Буняковского состоит в создании русской терминологии в теории вероятностей и в приложении теории вероятностей к задачам статистики и демографии.

Ученик В.Я. Буняковского великий русский математик **Пафнутий Львович Чебышёв (1821 - 1894)** расширил и обобщил закон больших чисел.

Ученик П.Л. Чебышёва **Андрей Андреевич Марков (1856 - 1922)** существенно расширил область применения закона больших чисел и центральной предельной теоремы, распространив их не только на независимые, но и на зависимые опыты. Важнейшей заслугой А.А. Маркова явилось то, что он заложил основы совершенно новой ветви теории вероятностей – теории случайных, или стохастических, процессов. Развитие этой теории составляет основное содержание современной теории вероятностей.

Другой ученик П.Л. Чебышёва **Александр Михайлович Ляпунов (1857 - 1918)** первым доказал центральную предельную теорему при чрезвычайно общих условиях.

Заслугой П.Л. Чебышёва, А.А. Маркова и А.М. Ляпунова является также введение и широкое использование понятия случайной величины.

Трудами ученых Петербургской математической школы теория вероятностей была выведена с задворков науки и поставлена как полноправный член в ряд математических наук. Условия применения ее методов были строго определены, а сами методы доведены до высокой степени совершенства.

Современное развитие теории вероятностей характеризуется всеобщим подъемом интереса к ней, а также расширением круга ее практических приложений. Советская школа теории вероятностей, унаследовав традиции Петербургской математической школы, занимала в мировой науке ведущее место.

Перечислим только некоторых крупнейших советских ученых, труды которых сыграли решающую роль в развитии современной теории вероятностей и ее практических приложений.

Сергей Натанович Бернштейн (1880 - 1968) разработал первую законченную аксиоматику теории вероятностей, а также существенно расширил область применения предельных теорем.

Александр Яковлевич Хинчин (1894 - 1959) известен своими исследованиями в области дальнейшего обобщения закона больших чисел, в области так называемых стационарных случайных процессов и в области математических методов теории массового обслуживания.

Особенно велики заслуги в развитии теории вероятностей **Андрея Николаевича Колмогорова (1903 - 1987)**, разработавшего наиболее совершенное аксиоматическое построение теории вероятностей на базе одного из важнейших разделов современной математики – метрической теории функций. Особое значение имеют работы А.Н. Колмогорова в области теории случайных функций (стохастических процессов), которые в настоящее время являются основой всех исследований в данной области.

Большой вклад в развитие многих ветвей теории вероятностей внес **Борис Владимирович Гнеденко (1912 - 1995)**, который решил вопрос об условиях сходимости распределения сумм независимых случайных величин ко всем возможным для них предельным распределениям и получил важные результаты в теории массового обслуживания и теории надежности.

Трудами перечисленных ученых, а также большого количества других выдающихся ученых, работы которых, к сожалению, невозможно осветить в коротком обзоре, и создана современная теория вероятностей. Основными разделами современной теории вероятностей являются:

1) случайные события и их вероятности;
2) случайные величины и их законы распределения вероятностей;
3) предельные теоремы теории вероятностей;
4) теория случайных функций;
5) теория информации;
6) теория массового обслуживания.

В заключение следует отметить, что в России курс теории вероятностей впервые был прочтен в 1829/30 учебном году в Вильнюсском университете магистром философии **Сигизмундом Ревковским (1807 - 1893)**. В 1830 году в Вильнюсском университете была создана кафедра теории вероятностей, и Ревковский был назначен профессором этой кафедры.

В Петербургском университете впервые начал читать лекции по теории вероятностей в 1837 г. **В.А. Анкудович**.

В Московском университете впервые теорию вероятностей в 1850 г. начал читать **Август Юльевич Давидов (1823 - 1885)**.

4.6. Список использованной литературы

1. *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей: Учебник для вузов. – М.: Высшая школа, 1999. – 576с.
2. *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.* Теория вероятностей и ее инженерные приложения. – М.: Наука, 1988. – 480с.
3. *Гнеденко Б.В.* Очерк истории теории вероятностей / В кн.: *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей: Учебник. – М.: Наука, 1988. – 448с.
4. *Григорян А.А.* Закономерности и парадоксы развития теории вероятностей: философско-методологический анализ. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 120с.
5. *Калинина В.Н., Панкин В.Ф.* Математическая статистика: Учебник для техникумов. – М.: Высшая школа, 1994. – 336с.
6. *Майстров Л.Е.* Теория вероятностей: Исторический очерк. – М.: Наука, 1967. – 320с.
7. Прикладная статистика: Основы моделирования и первичная обработка данных: Справочное изд. / *С.А. Айвазян, И.С. Енюков, Л.Д. Мешалкин*; Под ред. *С.А. Айвазяна*. – М.: Финансы и статистика, 1983. – 471с.
8. *Стройк Д.Я.* Краткий очерк истории математики / Пер. с нем. и дополнения *И.Б. Погребысского*. – М.: Наука, 1978. – 336с.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ВАСИЛЬЕВ Александр Анатольевич

**МАТЕМАТИКА:
ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ И КЛАССИФИКАЦИИ
ОСНОВНЫХ РАЗДЕЛОВ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ,
ИЗУЧАЕМЫХ СТУДЕНТАМИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ
СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ**

Учебно-справочное пособие

Редактор С.И. Шукурьян

Технический редактор Л.И. Василевская

Компьютерная верстка А.А. Васильев

Подписано в печать 20.12.2006 г. Формат 60×90 1/16.

Бумага типографская №1. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 6,5. Уч.-изд. л. 6,3.

Тираж 100 экз. Заказ № 848.

Тверской государственный университет,

Редакционно-издательское управление.

Адрес: Россия, 170000, г. Тверь, ул. Желябова 33,

Тел. РИУ: (4822) 42-60-63